MATEMATIK TAHLIL

SH. A. ALIMOV, R. R. ASHUROV

Matematik tahlil shakillanishi davrida unga differensial tenglamalarni tuzish va yechish usullari deb qaralgan edi.

Hozirgi kunda matematik tahlil deganda *differensial va integral hisobi* tushunilib, differensial tenglamalar nazariyasi deganda esa, asosan matematik tahlilning usul va natijalariga asoslangan, matematikaning alohida bo'limi tushuniladi.

Zamonaviy matematik tahlilning asosida *limitlar nazariyasi* yotadi deb xech ikkilanmasdan aytish mumkin. Keng ma'noda olib qaraganda, ayinan mana shu holat matematik tahlilni matematikaning boshqa bo'limlaridan ajratib turadi.

Taqdim qilinayotgan matematik tahlil kursida ko'pincha qat'iy bayondan avval intuitsiyaga asoslangan evristik tushuntirishlar keltiriladi. O'z-o'zidan ma'lumki, bu tushuntirishlar isbotlarning o'rnini bosmaydi albatta, balki o'quvchini isbotlarni, yangi kiritiladigan tushunchalarni yoki murakkab nazariy mulohazalarni qabul qilishga tayyorlaydi.

Ushbu kursning asosiy maqsadi - *bir o'zgaruvchili funksiyalar* uchun differensial va integral hisobni bayon etish. Bir o'zgaruvchili funksiya deb bu kursda haqiqiy sonlar to'plamini haqiqiy sonlar to'plamiga akslantirish tushuniladi. Shu sababli kurs haqiqiy sonlar to'plamini qurish bilan boshlanadi.

I Bob. Haqiqiy sonlar

§ 1.1. Butun sonlar

1. Biz butun sonlar xossalari o'quvchiga ma'lum deb hisoblaymiz. Odatda butun sonlar to'plami **Z** simvoli orqali belgilanadi.

Har qanday ikki m va n butun sonlar uchun qo'shish $m+n$ va ko'paytirish mn amallari aniqlangan. Bu ikki amal *kommutativlik*:

$$m+n=n+m, \qquad mn=nm \tag{1.1.1}$$

va *assotsiativlik*:

$$k+(m+n)=(k+m)+n, \qquad k(mn)=(km)n \tag{1.1.2}$$

xossalariga ega.

Bundan tashqari, bu ikki amal *distributivlik*:

$$k(m+n)=km+kn \tag{1.1.3}$$

qonuni bilan bog'langan.

$\mathbf{Z}$ to'plamida *nol* 0 va *bir* 1 sonlari alohida ajralib turadi. Ya'ni, har qanday $m \in \mathbf{Z}$ uchun

$$0 + m = m, \qquad 1m = m \tag{1.1.4}$$

tengliklar o'rinlidir.

Butun sonlar to'plami musbat butun sonlardan, manfiy butun sonlardan va noldan iborat. Har qanday butun a soni uchun $-a$ son qarama-qarshi son deyiladi va u quyidagi tenglikni qanoatlantiradi

$$a + (-a) = 0.$$

Ko'paytirish amali qo'shish amalidan shu bilan farq qiladiki, butun sonlar to'plamida, qo'shishdan o'laroq, ko'paytirish amali teskarilanuvchi emas. Boshqacha aytganda, biz har qanday butun a soni uchun unga teskari a^{-1} element, yani a bilan ko'paytmasi 1 ga teng bo'lgan element mavjud deya olmaymiz.

Musbat butun sonlar *natural* sonlar ham deb ataladi. Natural sonlar to'plami *natural qator* ham deyiladi va odatda $\mathbf{N}$ simvoli orqali belgilanadi.

Butun m sonining natural n -darajasi induksiya orqali aniqlanadi:

$$m^1 = m, \qquad m^n = mm^{n-1}. \tag{1.1.5}$$

Masalan, agar 2=1+1 deb aniqlasak,

$$m^2 = m \cdot m$$

bo'ladi.

Istalgan k butun son va ixtiyoriy natural m va n lar uchun

$$k^{m+n} = k^m \cdot k^n$$

tenglikning bajarilishi ravshan.

Bu tenglik manfiy bo'lmagan m va n larda ham o'rinli bo'lishi uchun $k \neq 0$ bo'lganda

$$k^0 = 1$$

deb hisoblanadi.

2. Biz ko'pincha sonlarning geometrik tasviridan foydalanamiz. Shu maqsadda biror to'g'ri chiziq olib, unda ixtiyoriy ravishda O nuqtani belgilaylik. Bu O nuqta to'g'ri chiziqni ikkita nurga ajratadi. Nurlardan birini musbat va ikkinchisini manfiy deb ataymiz. Odatda to'g'ri chiziq gorizontal ko'rinishda olinadi va o'ng tarafga ketgan nur musbat deb qaraladi. Albatta matematik nuqtai nazardan bu tanlov majburiy emas. Musbat nurda O nuqtadan farqli ixtiyoriy E_1 nuqtani belgilaymiz, so'ngra, OE_1 kesma davomida E_2 nuqtani shunday tanlaymizki, OE_1 va E_1E_2 kesmalar teng bo'lsin. Bu jarayonni davom ettirsak, shunday $E_1, E_2, ..., E_n, ...$ nuqtalarni olamizki, har bir E_n nuqta OE_{n-1} kesma davomida yotadi va quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$E_nE_{n+1} = OE_1, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Xuddi shu usulda manfiy nurda $OE_{-1} = OE_1$ kesmani olamiz va $E_{-2}, E_{-3}, ..., E_{-n}, ...$ nuqtalarni shunday belgilaymizki, E_{-n} nuqta OE_{-1} kesma davomida yotsin va quyidagi tengliklar bajarilsin:

$$E_{-n}E_{-n-1} = OE_1, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Bundan buyon biz E_n nuqtani butun n soniga , O nuqtani esa 0 ga, ya'ni nol soniga aynan teng deb qaraymiz. Bu tasvirlashda musbat sonlar 0 nuqtadan o'ngda va manfiy sonlar esa, bu nuqtadan chapda joylashadi. Xususan, barcha natural sonlar 0 nuqtadan o'ng tarafda yotadi.

3. Har qanday musbat butun n soni noldan katta deb hisoblanadi va $n > 0$ deb yoziladi. har qanday manfiy butun m soni esa noldan kichik deb hisoblanadi: $m < 0$.

Musbat sonlar va qo'shish amalidan foydalanib butun sonlarni taqqoslash mumkin. Chunonchi, agar biror k natural (ya'ni butun musbat) son uchun $n = m + k$ bo'lsa, biz $m < n$ deymiz. Bu $m < n$ tengsizlik $n > m$ ko'rinishda ham yoziladi.

Ushbu tengsizlik munosabati tranzitivlik xossasiga egadir, ya'ni agar $m < n$ va $n < k$ bo'lsa, $m < k$ bo'ladi.

Bundan tashqari, quyidagi ikki muhim xossalar ham o'rinli:

1) agar $m < n$ bo'lsa, ixtiyoriy $k \in \mathbf{Z}$ uchun

$$m + k < n + k$$

bo'ladi;

2) agar $m < n$ va $k > 0$ bo'lsa,

$$mk < nk$$

bo'ladi.

Qat'iy bo'lmagan $m \leq n$ tengsizlik yoki $m < n$, yoki $m = n$ ekanini anglatadi.

Kiritilgan taqqoslash quyidagi sodda geometrik ma'noga ega: agar $m < n$ tengsizlik bajarilsa, m nuqta n nuqtadan chaproqda joylashgan bo'ladi.

4. Butun sonlar to'plami $\mathbf{Z}$ ning biror E qismiy to'plami berilgan bo'lsin. Agar shunday butun $m \in E$ son topilsaki, ixtiyoriy $n \in E$ uchun

$$m \leq n$$

tengsizlik bajarilsa, m songa E to'plamning *minimal* elementi deyiladi.

Xuddi shu singari *maksimal* element tushunchasi ham kiritiladi.

Ravshanki, $\mathbf{Z}$ to'plamning har qanday qismiy to'plami ham maksimal yoki minimal elementlarga ega bo'lavermaydi. Masalan, musbat butun sonlar to'plami maksimal elementga ega emas, manfiy butun sonlar to'plami esa minimal elementga ega emas.

$\mathbf{N}$ natural sonlar to'plami butun sonlar to'plamining qismiy to'plami deb qaralganda, bu to'plamning eng muhim xossalaridan biri uning to'la tartiblanganligidir. Bu xossa shundan iboratki, $\mathbf{N}$ to'plamning ixtiyoriy qismiy to'plami eng kichik elementga egadir. O'ta muhim bo'lgan *matematik induksiya usuli (prinsipi)* aynan ana shu xossaning natijasidir. Biz bu usulning tadbiqini quyidagi sodda misolda namoyish qilamiz.

1.1.1-Misol. *Ixtiyoriy $n \in \boldsymbol{N}$ uchun*

$$2^n > n, \qquad n \in \mathbf{N}, \tag{1.1.6}$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. (i) Shubhasiz, agar $n = 1$ bo'lsa, (1.1.6) tengsizlik o'rinli:

$$2^1 > 1.$$

(ii) Endi (1.1.6) tengsizlikni $n = k$ da o'rinli deb faraz qilib, uning $n = k + 1$ da ham o'rinli ekanini ko'rsatamiz. Shunday qilib,

$$2^k > k$$

bo'lsin. U holda, bu tengsizlikni qo'llab,

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 \ > k \cdot 2 = k + k \geq k + 1$$

ni hosil qilamiz, ya'ni (1.1.6) tengsizlik $n = k + 1$ da ham o'rinli ekan.

(iii) Matematik induksiya prinsipi (1.1.6) tengsizlikni barcha natural n sonlari uchun o'rinli deb ta'kidlashimizga imkon beradi. Haqiqatdan, agar bunday bo'lmasa, shunday n sonlar topiladiki, ular uchun (1.1.6) tengsizlik bajarilmaydi. Agar (i) ni hisobga olsak, biz $n > 1$ deyishimiz mumkin. Natural sonlar to'plami to'la tartiblangan bo'lganligi sababli, bunday n sonlar ichida eng kichigi mavjud; biz uni $(k + 1)$ deb belgilaymiz. Bundan chiqdi, (1.1.6) tengsizlik $n = k$ da o'rinli bo'lib, $n = k+1$ da o'rinli emas ekan. Ammo buning bo'lishi mumkin emas, chunki bu tasdiq (ii) ga ziddir. Demak, (1.1.6) tengsizlik barcha n larda o'rinli ekan.

Q.E.D.

5. Odatda butun sonlarni quyidagi:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \tag{1.1.7}$$

raqamlardan foydalanib, o'nli sanoq sistemasida yozishadi, bunda

$$2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1, 5 = 4 + 1, 6 = 5 + 1, 7 = 6 + 1, 8 = 7 + 1, 9 = 8 + 1.$$

Bu holda sanoq sistemasining asosi qilib

$$10 = 9 + 1$$

soni olinadi.

Har qanday musbat butun k sonni

$$k = a_0 10^0 + a_1 10^1 + ... + a_n 10^n \tag{1.1.8}$$

ko'rinishda yagona usulda yozish mumkin, bunda har bir a_j koeffitsient (1.1.7) qiymatlardan birini qabul qiladi.

Odatda (1.1.8) son simvolik ravishda

$$k = a_n a_{n-1} ... a_1 a_0, \tag{1.1.9}$$

deb yoziladi, bunda a_0 - birlar soni, a_1 - o'nlar soni, a_2 - yuzlar soni va hakozo, deb ataladi. Ba'zan, k sonnig musbat ekanligini ta'kidlash maqsadida, (1.1.7) oldiga « + » - plyus belgisi qo'yiladi:

$$k = + \ a_n a_{n-1} ... a_1 a_0. \tag{1.1.10}$$

Manfiy m soni shu singari, lekin « $-$ » - minus ishora bilan yoziladi:

$$m = - \ b_n b_{n-1} ... b_1 b_0. \tag{1.1.11}$$

6. O'nli sanoq sistemasi o'rniga ixtiyoriy natural asosga ega bo'lgan sanoq sistemasini olish mumkin. Zamonaviy elektron hisoblash mashinalarida (compyuterlarda) ikkilik sanoq sistemasi qo'llaniladi. Bunga sabab kompyuterlar tuzilishining texnologik xususiyatlaridir.

Ikkilik sanoq sistemasida faqat ikki raqam: 0 va 1 ishlatiladi. Ushbu sistemaning asosi 1+1 soni bo'lib, quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$10 = 1 + 1. \tag{1.1.12}$$

Demak,

$$10^2 = (1 + 1)(1 + 1) = 1 + 1 + 1 + 1 \tag{1.1.13}$$

bo'ladi.

Bu (1.1.13) formula ikkilik sanoq sistemasida taniqli "ikki karra ikki to'rt"tengligini anglatadi.

Ikkilik sanoq sistemasida ham har qanday natural k sonni (1.1.8) yoki (1.1.9) ko'rinishda yozish mumkin, bunda a_j ikkita 0 yoki 1 qiymatlarni qabul qiladi, 10 esa (1.1.12) tenglik orqali aniqlanadi. Misol tariqasida birinchi to'qqizta natural sonlarni yozilishini keltiramiz; bunda biz chap tarafda sonni o'nli sanoq sistemasida va o'ng tarafda esa ikkilik sanoq sistemasida yozdik:

1=1,
2=10,
3=11,
4=100,
5=101,
6=110,
7=111,
8=1000,
9=1001.

Manfiy butun sonlar (1.1.11) ko'rinishda tasvirlanadi, bunda b_j ikkita 0 yoki 1 qiymatlarni qabul qiladi.

Shunday qilib, « + » yoki « − » ishora bilan olingan, nol va birlarning ixtiyoriy chekli ketma-ketligi biror butun sonni ifodalaydi va aksincha, ixtiyoriy butun son, « + » yoki « − » ishora bilan olingan, nol va birlarning chekli ketma-ketligi orqali ifodalanadi.

§ 1.2. Ratsional sonlar

Yuqorida qayd qilinganidek, butun sonlar to'plamida ko'paytirish amali, qo'shish amalidan o'laroq, teskarilanuvchi emas. Aynan mana shu hol butun sonlar to'plamini ratsional sonlar to'plamigacha kengaytirish uchun bo'lgan sabablardan biridir.

1. Butun sonning natural songa nisbati *ratsional son* deyiladi. Ya'ni, agar p butun son bo'lib, q natural son bo'lsa, ratsional son deb $\frac{p}{q}$ ko'rinishdagi ifodaga aytiladi. Odatda $\frac{p}{q}$ ratsional sonni kasr ham deb atashadi, bunda p surat va q maxraj deyiladi. Albatta, agar $pn = mq$ bo'lsa, $\frac{p}{q}$ va $\frac{m}{n}$ kasrlar o'zaro teng bo'ladi. Shuning uchun, qat'iy qilib aytganda, har qanday ratsional son - bu ekvivalent kasrlar sinfidir, ya'ni yuqoridagi ma'noda o'zaro teng bo'lgan barcha kasrlar sinfidan iboratdir. Lekin, shunga qaramasdan, biz musbat ratsional r son uchun

$$r = \frac{p}{q}$$

deb yozamiz va o'ng tarafda mos ekvivalent kasrlar sinfining biror vakili turibdi deb hisoblaymiz. Shuni qayd etamizki, bu kelishuvimizga ko'ra, ratsional son surati musbat yo manfiy butun son yoki noldan iborat bo'lib, maxraji esa doim musbat bolgan kasrdir.

Agar surat musbat bo'lsa, ratsional sonni *musbat* deymiz va aksincha, surat manfiy bo'lsa, ratsional sonni *manfiy* deymiz.

Shunday qilib, ratsional sonlar to'plami musbat ratsional sonlar, manfiy ratsional sonlar va noldan iborat ekan. Odatda ratsional sonlar to'plami **Q** simvoli orqali belgilanadi.

Har qanday ratsional sonni kasr oldiga « + » yoki « − » ishora qo'yib, surati manfiy bo'lmagan butun son va maxraji esa natural bo'lgan arifmetik kasr orqali ifoda qilish mumkin. Butun sonni ham, maxraji birga teng bo'lgan kasr ko'rinishdagi ratsional son deb qarasa bo'ladi.

2. Ratsional sonlar to'plami **Q** da tabiiy ravishda qo'shish va ko'paytirish amallari kiritiladi.

Ikki ratsional $\frac{p}{q}$ va $\frac{m}{n}$ sonlarning *yig'indisi* deb quyidagi ratsional songa aytiladi:

$$\frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{pn+qm}{qn}. \tag{1.2.1}$$

Ratsional $\frac{p}{q}$ va $\frac{m}{n}$ sonlarning *ko'paytmasi* deb quyidagi ratsional songa aytiladi:

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}=\frac{pm}{qn}. \tag{1.2.2}$$

Ratsional sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallari *kommutativ*:

$$r+s=s+r, \quad r\cdot s=s\cdot r$$

va *assotsiativ*:

$$r+(s+t)=(r+s)+t, \quad r\cdot(s\cdot t)=(r\cdot s)\cdot t$$

bo'lib, ular birgalikda esa *distributivlik* xossasiga:

$$r(s+t)=rs+rt$$

ega ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Ratsional sonlar to'plamida *nol* $0=\frac{0}{1}$ va *bir* $1=\frac{1}{1}$ aloxida o'rin tutadi. Chunonchi, ixtiyoriy ratsional r soni uchun

$$r+0=r, \quad r\cdot 1=r$$

tengliklar bajariladi.

Kiritilgan qo'shish va ko'paytirish amallari uchun ularga teskari bo'lgan ayirish va bo'lish amallarini aniqlash mumkin.

Ikki ratsional r va s sonlar *ayirmasi* deb

$$r=s+t$$

tenglik o'rinli bo'lgan ratsional t songa ayitiladi va $t=r-s$ deb yoziladi.

Agar $s\neq 0$ bo'lsa, ikki ratsional r va s sonlarning *bo'linmasi (nisbati)* deb

$$r=s\cdot t$$

tenglik o'rinli bo'lgan t ratsional songa aytiladi va $t=\frac{r}{s}$ deb yoziladi. Shuni qayd etamizki, oxirgi tenglikdagi kasr, uning surati va maxraji butun sonlar bo'lmagan xollarda qat'iy ma'noda arifmetik kasr bo'lmasligi mumkin.

Har qanday ratsional r soni uchun unga qarama-qarshi shunday $(-r)$ son mavjudki, u

$$r + (-r) = 0$$

tenglikni qanoatlantiradi va har qanday ratsional $r \neq 0$ son uchun unga teskari shunday r^{-1} son mavjudki, u

$$r \cdot r^{-1} = 1$$

tenglikni qanoatlantiradi.

Shuni aytish kerakki, nol teskari elementga ega emas, ya'ni nolga bo'lish amali aniqlanmagan.

3. Har qanday ikki ratsional sonni taqqoslash mumkin. Boshqacha aytganda, $\mathbf{Q}$ to'plamda tengsizlik munosabtini kiritisa bo'ladi. Buning uchun biz $\mathbf{Q}$ to'plamda manfiy va musbat elementlar mavjudligidan foydalanamiz, zero aynan shular orqali ratsional sonlar tartiblanadi.

Avval nol bilan taqqoslashni kiritaylik. Agar ratsional r son musbat bo'lsa, uni noldan katta deymiz $(r > 0)$, ratsional r son manfiy bo'lganda esa, uni noldan kichik deymiz $(r < 0)$.

Endi yuqoridagi aksiomalardan foydalanib, umumiy holda tengsizlik munosabatini kiritishimiz mumkin.

Ta'rif. *Agar ikki ratsional son uchun $s-r > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, r ratsional son s ratsional sondan kichik deyiladi:*

$$r < s \quad \Leftrightarrow \quad s - r > 0.$$

Bu $r < s$ tengsizlik $s > r$ ko'rinishda ham yoziladi.

Kiritilgan tengsizlik munosabati *tranzitivlik*, ya'ni: «agar $r < s$ va $s < t$ bo'lsa, $r < t$ bo'ladi», xossasiga ega ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Bundan tashqari, quyidagi ikki muhim xossalar ham o'rinli bo'ladi:

1) agar $r < s$ bo'lsa, ixtiyoriy ratsional t uchun $r + t < s + t$ tengsizlik bajariladi;

2) agar $r < s$ va $t > 0$ bo'lsa, $rt < st$ tengsizlik bajariladi.

Bunday aniqlangan taqqoslash qoidasiga muvofiq istalgan ikki r va s ratsional sonlar uchun quyidagi uch:

$$r < s, \quad r = s, \quad r > s$$

munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o'rinli bo'lishini qayd etamiz.

Shuni hisobga olgan holda, ratsional sonlar to'plami chiziqli tartiblangan deyiladi.

4. Ratsional sonlarning ushbu paragrafda sanab o'tilgan xossalari asosiy hisoblanib, ular yordamida boshqa ko'pgina xossalarni keltirib chiqarish mumkin. Qizig'i shundaki, bunda ratsional sonlarning qanday aniqlanganligi ahamiyatga ega bo'lmasdan, asosiysi ular uchun yuqoridagi xossalarning o'rinli ekanligidir. Yuqoridagi xossalarga ega bo'lgan ixtiyoriy tabiatdagi ob'yektlarni qarab va faqat keltirilgan xossalarga asoslanib, biz mazmundor tasdiqlarni keltirib chiqarishimiz mumkin. Albatta, olingan yangi tasdiqlar ratsional sonlar uchun ham o'rinli bo'ladi.

§ 1.3. Cheksiz o'nli kasrlar

1. Afsuski, ko'pgina masalalarni yechish uchun ratsional sonlarning o'zi yetarli emas. Masalan, yuzasi 50 kv.m. ga teng bo'lgan kvadratning tomonini topaylik. Bunday kvadratning tomoni $5\sqrt{2}$m ga teng bo'lishi kerak edi. Ammo bu son ratsional emas. Agar biz ratsional sonlar maydoni bilan cheklansak, bu ifoda nimani anglatishini umuman tushuntira olmaymiz. Bu kamchilikni qisqa qilib quidagicha aytish mumkin: ratsional sonlar to'plami to'la emas.

Shuning uchun ratsional sonlar to'plamini biror usul yordamida shunday to'ldirish zarurki, bunda, birinchidan, yangi elementlar xuddi ratsional sonlar xossalariga ega bo'lsin va ikkinchidan, ular, ratsional sonlar bilan birgalikda, to'la to'plamni tashkil qilsin. Ratsional sonlar to'plamini to'ldirishning eng oson yo'li cheksiz o'nli kasrlardan foydalanishdir.

Har qanday ratsional sonni davriy cheksiz o'nli kasr ko'rinishda yozish mumkin. Bunday kasrni olish uchun, masalan, burchak usuli bilan bo'lish algoritmidan foydalansa bo'ladi.

1.3.1 - Misol.

$$\frac{1}{3} = 0,3333...$$

Ba'zi ratsional sonlarni ikki usulda davriy cheksiz o'nli kasr ko'rinishda tasvirlash mumkin, masalan,

$$\frac{1}{2} = 0,50000... = 0,499999...$$

Bunday aniqmaslik faqat 0 yoki 9 sonlari davriy qatnashgandagina sodir bo'ladi. Bu aniqmaslikni yo'qotish maqsadida, bundan buyon shunday kasrlarni teng deb hisoblaymiz.

Ratsional sonlar to'plamiga davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasrlarni qo'shish yordamida yuqorida qayd qilingan to'ldirishga erishiladi.

Ta'rif. Quyidagi

$$x = a_0, a_1 a_2 ... a_n ..., \tag{1.3.1}$$

ko'rinishdagi ifodaga *musbat cheksiz o'nli kasr* deyiladi. Bunda a_0 - (butun qism deb ataymiz) manfiy bo'lmagan butun son va har bir $j \geq 1$ larda a_j (o'nli belgi deb ataymiz) sonlar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qiymatlardan birini qabul qilib, $a_k (k \geq 0)$ lardan kamida bittasi noldan farqlidir.

Ta'rif. Agar

$$y = -\, b_0, b_1 b_2 ... b_n ... \tag{1.3.2}$$

tenglikda minus « − » ishoraning o'ngida musbat cheksiz o'nli kasr turgan bo'lsa, bu (1.3.2) ifodaga *manfiy cheksiz o'nli kasr* deyiladi. Bu songa mos musbat cheksiz o'nli kasr

$$b = b_0, b_1 b_2 ... b_n ... \tag{1.3.3}$$

manfiy (1.3.2) kasrning *absolyut qiymati* deb ataladi. Bu holda

$$|y| = b$$

deb yoziladi.

Quyidagi ifodaga

$$0 = 0,00...0... \tag{1.3.4}$$

nollik cheksiz o'nli kasr, yoki oddiygina *nol* deyiladi.

Musbat cheksiz o'nli kasrning absolyut qiymati deb shu kasrning o'ziga aytiladi, nolning absolyut qiymati esa nolga teng deb hisoblanadi.

2. Ikki cheksiz o'nli kasr uchun tenglik tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif. *Agar*

$$a = a_0, a_1 a_2 ... a_n ... \tag{1.3.5}$$

va

$$b = b_0, b_1 b_2 ... b_n ... \tag{1.3.6}$$

cheksiz o'nli kasrlar uchun

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ ...,\ a_n = b_n, ... \tag{1.3.7}$$

tengliklar bajarilsa, bu kasrlarni ***teng*** *deymiz.*

Bundan tashqari, 0 yoki 9 davriy qatnashgan kasrlar uchun quyidagi qo'shimcha tenglik munosabatini kiritamiz.

Ta'rif. *Agar 9 davriy qatnashgan quyidagi*

$$a = a_0, a_1 a_2 ... a_{k-1} a_k 999...$$

davriy kasrda $a_k \neq 9$ *bo'lib, 0 davriy qatnashgan*

$$a' = a_0, a_1 a_2 ... a_{k-1} a'_k 000...$$

davriy kasrda $a'_k = a_k + 1$ *bo'lsa, bu davriy kasrlarni ham* ***teng*** *deb hisoblaymiz.*

3. Ikki cheksiz o'nli kasr uchun taqqoslash qoidasini kiritamiz.

Ta'rif. *Ikki musbat, o'zaro teng bo'lmagan,*

$$a = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$$

va

$$b = b_0, b_1 b_2 ... b_n ...$$

cheksiz o'nli kasr berilgan bo'lsin. Agar

$$a_0 > b_0$$

bo'lsa, yoki shunday n *nomer topilsaki,*

$$a_0 = b_0,$$

$$a_1 = b_1,$$

$$...$$

$$a_{n-1} = b_{n-1}$$

bo'lib,

$$a_n > b_n$$

bo'lsa, a *ni* b *dan* ***katta*** *deymiz va* $a > b$ *deb yozamiz.*

Bu ta'rifning 0 yoki 9 davrga ega bo'lgan davriy kasrlar uchun ham muvofiqlashganligini navbatdagi tasdiq ko'rsatadi.

1.3.1* - Tasdiq. *Mos ravishda 9 va 0 davriy qatnashgan ikki o'zaro teng cheksiz o'nli davriy kasrlar berilgan bo'lsin, ya'ni*

$$a = a_0, a_1 a_2 ... a_{k-1} a_k 9999...,$$

bunda $a_k \neq 9$ *va*

$$a' = a_0, a_1 a_2 ... a_{k-1} a'_k 0000...,$$

bunda $a'_k = a_k + 1$. *U holda quyidagi*

$$a < c < a'$$

qo'shaloq tengsizlikni qanoatlantiruvchi c *son mavjud emas.*

Isbot. Faraz qilamiz, shunday c son mavjud bo'lib, u

$$c = c_0, c_1 c_2 ...$$

ko'rinishga ega bo'lsin.

Ta'rifga ko'ra, $a < c$ tengsizlik shunday n nomerni mavjudligini anglatadiki, u uchun

$$c_0 = a_0, \quad c_1 = a_1, ..., \quad c_{n-1} = a_{n-1},$$

lekin

$$c_n > a_n$$

bo'ladi.

Ta'kidlash lozimki, n butun son isbot qilinayotgan tasdiq shartidagi k butun sondan kichik bo'la olmaydi. Haqiqatan, agar $n < k$ tengsizlik o'rinli bo'lganda edi, a va a' sonlarining verguldan keyingi birinchi $(n-1)$ o'nli belgilari teng bo'lgani uchun, biz na faqat $a < c$ tengsizlikka, balki $a' < c$ tengsizlikka ham ega bo'lar edik.

Yana ta'kidlash joizki, n butun son k butun sondan katta ham bo'la olmaydi, chunki a sonning k nomeridan boshlab, barcha o'nli belgilari 9 ga teng bo'lib, c_n sonlar , ravshanki, 9 dan katta bo'la olmaydi.

Shunday qilib, yuqoridagi n son tasdiq shartidagi k songa teng bo'lishi kerak ekan. Xuddi shu singari, c sonining o'nli belgilari ichida a' sonining ularga mos o'nli belgilaridan kichik bo'lgan birinchi belgisining nomeri ham k ga teng ekanligi ko'rsatiladi. Isbotlanayotgan tasdiqning shartiga ko'ra $a'_k = a_k + 1$ ekanligini eslasak,

$$a_k < c_k < a_k + 1$$

qo'shaloq tensizlikka ega bo'lamiz.

Ammo, ravshanki, bu qo'shaloq tengsizlik hech qanday butun a_k va c_k sonlar uchun o'rinli bo'la olmaydi. Hosil bo'lgan qarama - qarshilik 1.3.1* - Tasdiqning haq ekanligini isbotlaydi.

Q.E.D.

Ta'rif. *Har qanday musbat cheksiz o'nli kasr ixtiyoriy manfiy cheksiz o'nli kasrdan katta hisoblanadi.*

Ta'rif. *Agar* $|b| > |a|$ *bo'lsa,* a *manfiy cheksiz o'nli kasr* b *manfiy cheksiz o'nli kasrdan katta deyiladi.*

Ta'rif. *0 sonini har qanday manfiy cheksiz o'nli kasrdan katta va har qanday musbat cheksiz o'nli kasrdan kichik deb hisoblaymiz.*

Shunday qilib, ixtiyoriy ikki cheksiz o'nli kasrni o'zaro taqqoslash mumkin ekan, ya'ni *ikki cheksiz o'nli kasrlar yoki o'zaro teng, yoki ulardan biri ikkinchisidan katta bo'ladi.*

Odatdagidek, agar $b > a$ bo'lsa, a ni b dan kichik deymiz va $a < b$ deb yozamiz. Qat'iy bo'lmagan tengsizliklar $a \leq b$ va $a \geq b$ odatdagidek kiritiladi, ya'ni

$$(a \leq b) \qquad \Leftrightarrow \qquad (a < b) \vee (a = b).$$

Eslatma. Yuqorida kiritilgan ikki cheksiz o'nli kasrni taqqoslash qoidasidan tengsizlik munosabatining tranzitivligi to'g'ridan - to'g'ri kelib chiqadi:

$$(a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow (a < c),$$

ya'ni $a < b$ va $b < c$ tengsizliklardan $a < c$ tengsizlik kelib chiqadi.

4. Yuqoridagi tushunchalarning tadbiqi sifatida absolyut qiymatning xossalaridan birini isbotlaymiz.

1.3.2 - Tasdiq. *Quyidagi ikki tengsizliklar ekvivalentdir*:

$$|x| < a, \tag{1.3.8}$$

$$-a < x < a. \tag{1.3.9}$$

Isbot. Avvalo, har ikkala (1.3.8) va (1.3.9) tengsizliklarda a cheksiz o'nli kasrning musbat bo'lishini ta'kidlaymiz, chunki aks holda, ikkala tengsizlik ham hech qanday x uchun o'rinli bo'lmas edi. Shu sababli, bundan buyon $a > 0$ deb hisoblaymiz.

1) Dastavval (1.3.8) dan (1.3.9) kelib chiqishini isbotlaymiz. Demak, (1.3.8) tengsizlik bajarilsin deb faraz qilaylik. Agar $x \geq 0$ bo'lsa, bu tengsizlik

$$x < a$$

ko'rinishga keladi va shuning uchun x cheksiz o'nli kasr (1.3.9) qo'shaloq tengsizlikni ham qanoatlantiradi.

Agarda $x < 0$ bo'lsa, (1.3.8) tengsizlikni unga ekvivalent $|x| < |-a|$ ko'rinishda yozib olamiz, qaysiki, manfiy x va $(-a)$ cheksiz o'nli kasrlarni taqqoslash qoidasiga binoan $x > -a$ tengsizlik bajarilishini anglatadi, ya'ni bu holda ham x (1.3.9) qo'shaloq tengsizlikni qanoatlantirar ekan.

2) Xuddi yuqoridagidek (1.3.9) dan (1.3.8) ning kelib chiqishi isbotlanadi.

Q.E.D.

§ 1.4. Haqiqiy sonlar

1.

Ta'rif. ***Haqiqiy son*** *deb cheksiz o'nli kasrga aytamiz.*

Haqiqiy sonlar to'plami $\mathbf{R}$ simvoli orqali belgilanadi va sonlar o'qi ham deb ataladi. $x \in \mathbf{R}$ yozuv x haqiqiy son (yoki qisqaroq qilib, son) ekanligini anglatadi.

Ravshanki, ratsional sonlar haqiqiy sonlarning barcha davriy cheksiz o'nli kasrlardan iborat qismiy to'plamini tashkil qiladi, ya'ni $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Ratsional bo'lmagan haqiqiy sonlarga *irratsional* sonlar deyiladi.

Bizning galdagi vazifamiz haqiqiy sonlar uchun arifmetik amallarni, ya'ni qo'shish va ko'paytirishni kiritishdir. Biz bu vazifani keyingi paragrafda amalga oshiramiz. Ushbu paragrafda esa, haqiqiy sonlarning yuqorida o'rnatilgan tengsizlik munosabatlari bilan bog'liq bo'lgan asosiy xossalarini o'rganamiz.

Sonlar o'qining quyidagi qismiy to'plamlarini kiritaylik:

ochiq interval yoki qisqaroq, *interval* deb

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} : \quad a < x < b\} \tag{1.4.1}$$

to'plamga;

yopiq interval yo *segment* yoki bo'lmasa *kesma* deb

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : \quad a \leq x \leq b\} \tag{1.4.2}$$

to'plamga;

yarim interval deb

$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} : \quad a \leq x < b\} \tag{1.4.3}$$

yoki

$$(a,b] = \{x \in \mathbf{R}: \qquad a < x \le b\} \tag{1.4.4}$$

to'plamlarga aytamiz.

2. Ushbu bandda biz $\mathbf{Q}$ ratsional sonlar to'plami $\mathbf{R}$ haqiqiy sonlar to'plamida zich ekanligini ko'rsatamiz.

Ta'rif. *Faraz qilaylik, E haqiqiy sonlar to'plami $\boldsymbol{R}$ ning biror qismiy to'plami bo'lsin. Agar E ning $\boldsymbol{R}$ dan olingan ixtiyoriy interval bilan kesishmasi bo'sh bo'lmasa, E to'plam $\boldsymbol{R}$ da **zich** deyiladi.*

1.4.1* - Tasdiq. $\mathbf{Q}$ *ratsional sonlar to'plami $\boldsymbol{R}$ haqiqiy sonlar to'plamida zichdir.*

Isbot. Faraz qilaylik, (a,b) sonlar o'qi $\mathbf{R}$ dan olingan ixtiyoriy interval bo'lsin. Bu intervalda kamida bitta c ratsional son borligini isbotlaymiz.

Agar a va b sonlar ratsional bo'lsa, masala hal; c sifatida ularning o'rta arifmetik qiymatini olamiz:

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Faraz qilaylik,

$$a = a_0, a_1 a_2 ...$$

va

$$b = b_0, b_1 b_2 ...$$

bo'lib, ulardan kamida bittasi, masalan, b irratsional son bo'lsin.

Intervalning ta'rifiga ko'ra $a < b$ va demak, shunday manfiy bo'lmagan butun k son topiladiki,

$$a_0 = b_0, \;\; a_1 = b_1, ..., \;\; a_{k-1} = b_{k-1}$$

bo'lib,

$$a_k < b_k$$

bo'ladi.

Endi c sifatida quyidagi

$$c = b_0, b_1 b_2 ... b_k 000...$$

davriy cheksiz o'nli kasrni olsak bo'lar edi, chunki, ravshanki, $a \le c < b$. Ammo a soni, davri 9 bo'lib, c ga teng bo'lgan cheksiz davriy o'nli kasr bo'lib qolishi ham mumkin. U holda $a < c$ tengsizlik bajarilmaydi va natijada c soni (a,b) interval ichida yotmay qoladi.

Biz bu isbotni ozgina o'zgartiramiz va buning uchun b sonining irratsional ekanligidan foydalanamiz. Ravshanki, $j > k$ bo'lganda b_j o'nli belgilar orasida noldan farqlilari topiladi. Bunday o'nli belgilardan birinchisi $b_n > 0, \;\; n > k$ bo'lsin. U holda c sifatida davri 0 bo'lgan quyidagi cheksiz davriy o'nli kasrni olamiz:

$$c = b_0, b_1 b_2 ... b_n 000...$$

O'z-o'zidan ko'rinib turibdiki $c < b$. Bundan tashqari, $a \le c$ va $a \ne c$ ekanligini ko'rish qiyin emas. Demak, $a < c < b$.

Q.E.D.

Navbatdagi tasdiq ixtiyoriy haqiqiy sonni ratsional sonlar bilan yaqinlashtirish mumkinligini ko'rsatadi. Ratsional sonlar uchun arifmetik amallar aniqlanganini eslatib o'tamiz.

1.4.2 - Tasdiq. *Ixtiyoriy haqiqiy c soni berilgan bo'lsin. Har qanday ratsional $\varepsilon > 0$ son olganda ham shunday ikki ratsional $\alpha < c$ va $\beta > c$ sonlari topiladiki, ular uchun*

$$\beta \ - \ \alpha \ < \ \varepsilon \tag{1.4.5}$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. Agar c ratsional son bo'lsa,

$$\alpha = c - \frac{\varepsilon}{4}, \quad \beta \ = c + \frac{\varepsilon}{4}$$

deb olishning o'zi yetarli.

Endi c irratsional son bo'lsin. Aniqlik uchun, bu son

$$c = c_0, c_1c_2c_3...$$

ko'rinishdagi davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasr bo'lsin.

Biz n nomerni quyidagi shartdan tanlab olamiz:

$$n \ > \ \frac{1}{\varepsilon} \ .$$

U holda, ravshanki, (1.1.6) ga ko'ra,

$$10^n > 2^n > n > \frac{1}{\varepsilon}$$

va shuning uchun,

$$10^{-n} < \ \varepsilon \ .$$

Endi

$$\alpha \ = \ c_0, c_1c_2...c_n000...$$

va

$$\beta \ = \ c_0, c_1c_2...c_n999...$$

desak, ravshanki,

$$\beta \ - \alpha \ = \ 10^{-n-1} \ < \ \varepsilon$$

bo'ladi.

Q.E.D.

Eslatma. 1.4.2 - Tasdiq ixtiyoriy $c \in \mathbf{R}$ uchun shu sonni o'z ichiga olgan, ratsional chetli va istalgancha kichik uzunlikka ega bo'lgan (α, β) intervalning topilishini anglatadi. Bunda α va β sonlari mos ravishda chapdan va o'ngdan c soniga ratsional sonlar bilan yaqinlashishni beradi.

3. Yuqorida o'rnatilgan haqiqiy sonlarni taqqoslash qoidasi yuqoridan yoki quyidan chegaralangan to'plam tushunchalarini kiritishga imkon beradi.

Faraz qilaylik, E haqiqiy sonlar to'plami $\mathbf{R}$ ning ixtiyoriy qismiy to'plami bo'lsin.

Ta'rif. *Agar shunday M soni topilsaki, ixtiyoriy $x \in E$ uchun*

$$x \leq M$$

tengsizlik bajarilsa, $E \subset \mathbf{R}$ to'plamni ***yuqoridan chegaralangan*** *deymiz.*

Bunda M soni E to'plamning *yuqori chegarasi* deyiladi.

Ta'rif. *Agar shunday m soni topilsaki, ixtiyoriy $x \in E$ uchun*

$$x \geq m$$

tengsizlik bajarilsa, $E \subset \mathbf{R}$ to'plamni ***quyidan chegaralangan*** *deymiz.*

Bunda m soni E to'plamning *quyi chegarasi* deyiladi.

Ta'rif. *Agar to'plam yuqoridan ham quyidan ham chegaralangan bo'lsa, u **chegaralangan** deyiladi.*

Shubhasiz, agar biror to'plam yuqoridan chegaralangan bo'lib, M uning yuqori chegarasi bo'lsa, M dan katta ixtiyoriy son ham shu to'plamning yuqori chegarasi bo'ladi. Boshqacha aytganda, yuqoridan chegaralangan to'plam cheksiz ko'p yuqori chegaralarga ega. Shular ichida eng kichigi ayniqsa muhimdir.

Ta'rif. *Yuqoridan chegaralangan to'plamning **aniq yuqori chegarasi** deb yuqori chegaralarning eng kichigiga aytiladi.*

Boshqacha aytganda, agar M soni quyidagi ikki shartlarni qanoatlantirsa, u E to'plamning aniq yuqori chegarasi deyiladi:

(i) ixtiyoriy $x \in E$ uchun
$$x \leq M$$
tengsizlik o'rinli;

(ii) ixtiyoriy $M' < M$ uchun shunday $x' \in E$ topiladiki,
$$x' > M'$$
tengsizlik bajariladi.

Bunda (i) - shart M son E to'plamning yuqori chegarasi ekanligini, (ii) - shart esa, ixtiyoriy kichikroq M' son yuqori chegara bo'la olmasligini, ya'ni M eng kichik yuqori chegara ekanligini anglatadi.

E to'plamning aniq yuqori chegarasi $\sup E$ simvoli orqali belgilanadi.

Quyidan chegaralangan E to'plamning *aniq quyi chegarasi* bu to'plam quyi chegaralarining eng kattasi sifatida aniqlanib, $\inf E$ simvoli orqali belgilanadi.

Agar E to'plamining aniq yuqori chegarasi M shu to'plamning elementi bo'lsa ($M \in E$), M shu to'plamning *maksimal* elementi yoki sodda qilib *maksimumi* deb ataladi. Xuddi shu kabi, *minimal* element yoki *minimum* aniqlanadi.

Ratsional sonlar sinfi ko'pgina masalalarni yechishga yetarli emasliligi to'g'risida yuqorida aytilgan edi. Misol sifatida quidagi
$$E = \{x \in \mathbf{Q} : \quad x^2 < 2\}$$
to'plamning aniq yuqori chegarasini topish masalasini qaraylik.

Bu to'plamning aniq yuqori chegarasi $\sqrt{2}$ bo'lishi mumkin edi, ammo bu son ratsional emas, shuning uchun ratsional sonlar sinfida u «mavjud emas». Bunga sabab ratsional sonlar to'plamining to'la emasligi bo'lsa, haqiqiy sonlar to'plamining eng muhim xossasi uning to'laligidir.

1.4.1 - Teorema (to'lalik haqidagi asosiy teorema). *Haqiqiy sonlarning har qanday bo'sh bo'lmagan yuqoridan chegaralangan to'plami aniq yuqori chegaraga egadir.*

Isbot. Faraz qilaylik, E haqiqiy sonlarning aqalli bitta elementga ega bo'lgan yuqoridan chegaralangan to'plami bo'lsin.

1) Avval E to'plam elementlari orasida kamida bitta manfiy bo'lmagan son bor bo'lgan holni qaraymiz. Albatta, bu holda aniq yuqori chegara ham manfiy bo'lmaydi. E to'plamning yuqori chegaralaridan biri M bo'lsin deb faraz qilamiz, yani istalgan $x \in E$ uchun
$$x \leq M$$
bo'lsin.

E to'plamdagi istalgan manfiy bo'lmagan sonni
$$a = a_0, a_1 a_2 ... \tag{1.4.6}$$

ko'rinishda belgilab olamiz. Ma'lumki, biz a_0 ni butun qism va $j \geq 1$ bo'lganda a_j sonlarni o'nli belgilar deb atagan edik.

Shubhasiz, barcha (1.4.6) ko'rinishdagi sonlarning butun qismlari M dan katta emas, shuning uchun, butun qismlar ichida eng kattasi mavjud. Ana shu butun qismni b_0 orqali belgilaymiz. Bu b_0 sonning ham manfiy emasligi aniq.

Biz E to'plamning (1.4.6) ko'rinishdagi sonlari ichida faqat butun qismi b_0 ga teng bo'lganlarinigina qaraymiz. Bu sonlar ichida verguldan keyingi birinchi o'nli belgisi a_1 eng katta bo'lgan son mavjud. Ana shu eng katta o'nli belgini b_1 orqali belgilaymiz. Ravshanki, b_1 (1.1.7) qiymatlardan birini qabul qiladi.

Endi E to'plamning (1.4.6) ko'rinishdagi sonlari ichida faqat butun qismi b_0 ga va birinchi o'nli belgisi b_1 ga tenglarinigina qaraymiz. Bu sonlar ichida verguldan keyingi ikkinchi o'nli belgisi a_2 eng katta bo'lgan son topiladi. Ana shu eng katta o'nli belgini b_2 orqali belgilaymiz.

Mana shu jarayonni davom ettirib, biz quyidagi cheksiz o'nli kasrni olamiz:

$$b = b_0, b_1 b_2 ... b_n ... \tag{1.4.7}$$

Aynan mana shu son E to'plamning aniq yuqori chegarasi bo'lishi aniq. Haqiqatan, bu sonning tanlanishiga ko'ra, istalgan $a \in E$ uchun,

$$a \leq b \tag{1.4.8}$$

bo'ladi, ya'ni, b son E to'plamning yuqori chegarasi ekan. Yana b sonning tanlanishiga asosan, agar biz (1.4.7) dagi o'nli belgilardan birortasini kichkinaytirsak, (1.4.8) tengsizlik barcha $a \in E$ lar uchun o'rinli bo'lmay qoladi. Demak, b aniq yuqori chegara ekan.

2) Endi E to'plamning barcha elementlari manfiy sonlar bo'lsin. Ushbu holda manfiy

$$x = -\, a_0, a_1 a_2 ...$$

sonlar o'rniga ularning absolyut qiymatlarini, ya'ni

$$|x| = a_0, a_1 a_2 ...$$

sonlarni qaraymiz.

So'ngra, E dagi sonlarning absolyut qiymatlaridan tuzilgan to'plamning (1.4.7) ko'rinishdagi aniq quyi chegarasini, ya'ni b cheksiz o'nli kasrni quramiz. Chunonchi, har bir qadamda a_k o'nli belgining eng kichik qiymatini olamiz va uni b_k deb belgilaymiz. Shundan so'ng, $(-\, b)$ son E to'plamning aniq yuqori chegarasi ekanligi osongina tekshiriladi.

Q.E.D.

4. E to'plam chegaralangan bo'lmaganda ham aniq yuqori chegara simvoli $\sup E$ ishlatiladi va bunda

$$\sup E \ = \ +\infty \tag{1.4.9}$$

deb hisoblanadi, bu yerda ∞ - cheksizlik belgisi.

Shunga o'xshash, to'plam quyidan chegaralanmagan holda

$$\inf E \ = \ -\infty \tag{1.4.10}$$

deb yozishadi.

Yuqoridan chegaralanmagan to'plamlarga eng muhim misollar sifatida, quyidagi tengliklar bilan aniqlangan,

$$(a, \ +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : \quad x > a\} \tag{1.4.11}$$

ochiq yarim to'g'ri chiziqni va

$$[a,\ +\infty) = \{x \in \mathbf{R}: \quad x \geq a\} \tag{1.4.12}$$

yopiq yarim to'g'ri chiziqni olish mumkin.

Quyidan chegaralanmagan to'plamlarga esa misollar sifatida quyidagi ochiq yarim to'g'ri chiziqni:

$$(-\infty,\ b) = \{x \in \mathbf{R}: \quad x < b\} \tag{1.4.13}$$

va

$$(-\infty,\ b] = \{x \in \mathbf{R}: \quad x \leq b\} \tag{1.4.14}$$

tengliklar bilan aniqlangan yopiq yarim to'g'ri chiziqni olish mumkin.

Haqiqiy sonlar to'plami $\mathbf{R}$ ni ba'zan cheksizlik simvoli orqali ham belgilashadi:

$$\mathbf{R} = (-\infty,\ +\infty).$$

§ 1.5. Haqiqiy sonlar ustida arifmetik amallar

1. Ushbu paragrafda biz haqiqiy sonlar ustida arifmetik amallarni aniqlaymiz. Bunda quyidagi oddiy kuzatish asos qilib olinadi: agar biz haqiqiy a va b sonlarni ratsional α va β sonlar bilan mos ravishda yaqinlashtirsak, $\alpha + \beta$ va $\alpha\beta$ ratsional sonlar ham mos ravishda $a + b$ yig'indiga va ab ko'paytmaga yaqinlashishi kerak.

Istalgan haqiqiy sonni ratsional sonlar bilan ixtiyoriy aniqlikda yaqinlashtirish mumkinligi 1.4.2 - Tasdiqda o'rnatilganligini eslatib o'tamiz.

Yozuvni soddalashtirish maqsadida quyidagi belgilashni kiritamiz. Ixtiyoriy haqiqiy son a uchun $R(a)$ simvoli orqali a dan kichik bo'lmagan ratsional sonlar to'plamini belgilaymiz:

$$R(a) = \{x \in \mathbf{Q}\ :\ x \geq a\}\ =\ \mathbf{Q} \cap [\,a,\ +\infty). \tag{1.5.1}$$

Bu to'plam quyidagi o'z-o'zidan ko'rinib turgan xossaga ega.

1.5.1* - Tasdiq. *Istalgan $a \in \boldsymbol{R}$ uchun*

$$\inf R(a) = a \tag{1.5.2}$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Bevosita $R(a)$ to'plamning ta'rifidan a son quyi chegara ekanligi ko'rinib turibdi. Shuning uchun biz ana shu son quyi chegaralarning eng kattasi, ya'ni aniq quyi chegara ekanligini ko'rsatishimiz kifoya.

Biror $c > a$ son ham $R(a)$ to'plamning quyi chegarasi deb faraz qilaylik, ya'ni istalgan $x \in R(a)$ uchun $x \geq c$ bo'lsin. Ratsional sonlarning $\mathbf{R}$ da to'laligiga ko'ra, (a, c) intervalda kamida bitta ratsional x' son topiladi, ya'ni $a < x' < c$. (1.5.1) ta'rifga ko'ra $x' \in R(a)$. Ammo, ravshanki, bu element $x' \geq c$ tengsizlikni qanoatlantirmaydi. Hosil bo'lgan qarama-qarshilik tasdiqni isbotlaydi.

Q.E.D.

Eslatma. Agar a ratsional son bo'lsa, $R(a)$ to'plamning aniq quyi chegarasi shu to'plamning o'ziga tegishli bo'lib,

$$\inf R(a) = \min R(a) = a \tag{1.5.3}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

2. Ikki haqiqiy a va b sonlarning yig'indisini aniqlashdan boshlaymiz. (1.5.1) ta'rifga ko'ra, $R(a)$ to'plam elementlari $x \geq a$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi, $R(b)$ to'plam elementlari esa $y \geq b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha ratsional sonlardan iborat. Ratsional sonlar uchun arifmetik amallar aniqlangan ekanligini eslatib o'tamiz.

Ta'rif. *Ikki haqiqiy a va b sonlar* ***yig'indisi*** *deb*

$$c \; = \inf_{x\in R(a),\; y\in R(b)} (x+y) \tag{1.5.4}$$

tenglik orqali aniqlangan c songa aytamiz.

Har qanday ikki haqiqiy son yig'indisining mavjudligi haqiqiy sonlar to'plamining to'laligi haqidagi asosiy teoremadan kelib chiqadi.

Quyidagi tasdiq o'rinli.

1.5.2 - Tasdiq. *Agar a va b ratsional sonlar bo'lsa,* (1.5.4) *tenglik bilan aniqlangan a va b haqiqiy sonlar yig'indisi ratsional sonlar maydonida aniqlangan* $(a+b)$ *yig'indi bilan ustma-ust tushadi.*

Isbot to'g'ridan-to'g'ri (1.5.3) tengliklardan kelib chiqadi.

Bu tasdiq ikki haqiqiy sonning yig'indisi uchun odatdagi $c = a + b$ belgilashdan foydalanishga imkon beradi.

Shuni aytish kerakki, yuqoridagi ta'rifda a sondan o'ngda joylashgan barcha ratsional sonlar to'plami $R(a)$ o'rniga, a sondan chapda joylashgan barcha ratsional sonlar to'plami:

$$L(a) = \{x \in \mathbf{Q} \;:\; x \leq a\} \;=\; (-\infty\,,\; a\,] \cap \mathbf{Q} \tag{1.5.5}$$

dan ham foydalansa bo'ladi.

Bunda ikki haqiqiy a va b sonlar yig'indisi sifatida quyidagi

$$d \; = \sup_{x\in L(a),\; y\in L(b)} (x+y) \tag{1.5.6}$$

tenglik orqali aniqlangan d son olinadi.

Bunday aniqlangan yig'indi yuqorida aniqlangan yig'indi bilan ustma-ust tushishini ko'rsatish qiyin emas, ya'ni navbatdagi tasdiq o'rinlidir.

1.5.3* - Tasdiq. *Istalgan ikki haqiqiy a va b sonlar uchun (1.5.6) tenglik orqali aniqlangan d son shu sonlar yig'indisiga teng:*

$$d = a + b. \tag{1.5.7}$$

Isbot. Agar $x \in L(a), x' \in R(a)$ va $y \in L(b), y' \in R(b)$ bo'lsa,

$$x \;\leq\; a \;\leq\; x', \quad y \;\leq\; b \;\leq\; y' \tag{1.5.8}$$

bo'ladi va shuning uchun,

$$x + y \;\leq\; x' + y'.$$

Demak, ushbu tengsizlik chap tomonidagi yig'indining aniq yuqori chegarasi, ya'ni d soni, o'ng tarafdagi yig'indining aniq quyi chegarasidan, ya'ni $a+b$ sonidan oshib ketmaydi. Binobarin,

$$d \;\leq\; a + b. \tag{1.5.9}$$

Endi, istalgan ratsional $\varepsilon > 0$ son uchun (1.5.8) shartdagi ratsional x, x', y va y' sonlarni

$$x' - x < \varepsilon, \quad y' - y < \varepsilon \tag{1.5.10}$$

tengsizliklarni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz (ravshanki, 1.4.2 - Tasdiqqa ko'ra buni amalga oshirish mumkin).

Shunday ekan, d sonining (1.5.6) ta'rifiga ko'ra,

$$x' + y' \ < \ x + y + 2\varepsilon \ \le \ d + 2\varepsilon,$$

natijada, chap tarafning aniq quyi chegarasini olsak,

$$a + b \ < \ d + 2\varepsilon \tag{1.5.11}$$

tengsizlik hosil bo'ladi.

Nihoyat, (1.5.9) va (1.5.11) larni solishtirib,

$$d \ \le \ a + b \ < \ d + 2\varepsilon$$

tengsizliklarni olamiz va bundan, $\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriyligiga ko'ra, talab qilingan

$$a + b = d$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Q.E.D.

Haqiqiy sonlar uchun (1.5.4) tenglik orqali aniqlangan qo'shish amali xuddi ratsional sonlarni qo'shish amali singari xossalarga ega ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

1) Haqiqatan, *kommutativlik* xossasi quyidagi tenglikdan kelib chiqadi:

$$\inf_{x \in R(a),\ y \in R(b)} (x + y) \ = \ \inf_{y \in R(b),\ x \in R(a)} (y + x). \tag{1.5.12}$$

2) Shunga o'xshash, *assotsiativlik* xossasi ratsional sonlar yig'indisininig assotsiativligining bevosita natijasidir.

3) Nol element sifatida, ravshanki, quyidagi cheksiz o'nli kasr olinadi:

$$0 = 0,000...$$

Haqiqatan, agar $x \in R(a)$ va $y \in R(0)$ bo'lsa, ya'ni, x va y quyidagi

$$x \ge a, \quad y \ge 0$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ratsional sonlar bo'lsa, ravshanki,

$$a + 0 = \inf (x + y) = \inf (x + 0) = \inf \ x = a$$

bo'ladi.

4) Nihoyat, ravshanki, istalgan a uchun unga *qarama-qarshi* $(-a)$ element mavjud. Haqiqatan, agar $a > 0$ element

$$a = c_0, c_1 c_2 c_3 ... \tag{1.5.13}$$

ko'rinishga ega bo'lsa, unga qarama-qarshi element sifatida

$$-a = -c_0, c_1 c_2 c_3 ..., \tag{1.5.14}$$

manfiy cheksiz o'nli kasrni olish kerak, va aksincha, (1.5.14) ko'rinishdagi elementga qarama-qarshi sifatida (1.5.13) element olinadi.

Biz ikki haqiqiy sonning yig'indisini aniqlagan vaqtda bu sonlarning musbat ekanligini talab qilmagan edik. Ma'lumki, agar haqiqiy son « + » ishorali (yoki umuman ishorasiz) cheksiz o'nli kasr orqali ifodalansa, bunday son musbat, va aksincha, agar haqiqiy son «−» ishorali cheksiz o'nli kasr orqali ifodalansa, bunday son manfiy deyilgan edi. Demak, agar a musbat haqiqiy son bo'lsa, $-a$ manfiy haqiqiy son bo'ladi.

Quyidagi sodda tasdiq o'rinli.

1.5.4* - Tasdiq. *Ixtiyoriy ikki a va b musbat haqiqiy sonlar uchun*

$$-(a+b) = (-a) + (-b) \tag{1.5.15}$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Ixtiyoriy $x \in L(a)$ va $y \in L(b)$ berilgan bo'lsin, ya'ni x va y ratsional sonlar uchun

$$x \ \leq \ a, \quad y \ \leq \ b$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsin.

U holda

$$-x \ \geq \ -a, \quad -y \ \geq \ -b$$

va shuning uchun $-x \in R(-a)$ va $-y \in R(-b)$. Demak, 1.5.3* - Tasdiqqa va aniq quyi hamda aniq yuqori chegaralarning keyingi paragrafda keltirilgan 1.7.9 - Tasdiqdagi xossasiga ko'ra,

$$(-a) + (-b) = \inf[(-x) + (-y)] = \inf[-(x+y)] = -\sup(x+y) = -(a+b).$$

Q.E.D.

3. Ikki haqiqiy sonning ko'paytmasini aniqlashga o'tamiz. Avval ikkala ko'paytuvchi musbat bo'lgan holni qaraymiz.

Ta'rif. *Ikki musbat haqiqiy a va b sonlarning* ***ko'paytmasi*** *deb quyidagi haqiqiy c songa aytamiz:*

$$c \ = \inf_{x \in R(a),\ y \in R(b)} x \cdot y. \tag{1.5.16}$$

Haqiqiy sonlar to'plamining to'laligi haqidagi asosiy teoremadan istalgan ikki haqiqiy musbat son ko'paytmasining mavjudligi kelib chiqadi.

Quyidagi tasdiq o'rinli.

1.5.5 - Tasdiq. *Agar a va b musbat ratsional sonlar bo'lsa, (1.5.16) tenglik bilan aniqlangan a va b haqiqiy sonlar ko'paytmasi ratsional sonlar maydonida aniqlangan ab ko'paytma bilan ustma-ust tushadi.*

Isbot xuddi 1.5.2 - Tasdiq isboti singari, to'g'ridan-to'g'ri (1.5.3) tengliklardan kelib chiqadi.

Bu tasdiq ikki musbat haqiqiy sonning ko'paytmasi uchun odatdagi $c = a \cdot b = ab$ belgilashdan foydalanishga imkon beradi.

Biz, xuddi ikki haqiqiy son yig'ndisi holidek, a va b sonlari ko'paytmasini, ekvivalent ravishda, barcha $x \in L(a)$ va $y \in L(b)$ lar uchun xy sonlar to'plamining aniq yuqori chegarasi sifatida aniqlashimiz mumkin edi. Ammo ko'paytma uchun bu ta'rifdan foydalanib bo'lmas ekan. Haqiqatan, masalan, $a = b = 1$ bo'lgan holda xy sonlar to'plami butun sonlar o'qiga teng bo'lar edi.

Shunday hollarni bartaraf qilish maqsadida, $L(a)$ to'plamdan barcha manfiy sonlarni chiqarib tashlaymiz, ya'ni istalgan $a > 0$ uchun quyidagi to'plamni kiritamiz:

$$L^+(a) \ = \ \{x \in Q \ : \ 0 < x \leq a\}. \tag{1.5.17}$$

Endi

$$d = \sup_{x\in L^+(a), y\in L^+(b)} x\cdot y \qquad (1.5.18)$$

deb belgilasak, bunday aniqlangan ko'paytma yuqorida aniqlangan ko'paytma bilan ustma-ust tushadi.

1.5.6* - Tasdiq. *Ixtiyoriy musbat haqiqiy a va b sonlar uchun (1.5.18) tenglik bilan aniqlangan d son ularning ko'paytmasiga teng:*

$$d = ab. \qquad (1.5.19)$$

Isbot. Bu tasdiq, 1.4.2 - Tasdiqdan foydalangan xolda, xuddi 1.5.3* - Tasdiq singari isbotlanadi.

Ta'rif. *Ikki manfiy a va b haqiqiy sonlarning ko'paytmasi deb quyidagi haqiqiy songa aytamiz:*

$$ab = |a||b|. \qquad (1.5.20)$$

Ta'rif. *Agar ikki a va b haqiqiy sonlardan biri manfiy va boshqasi musbat bo'lsa, ularning ko'paytmasi deb quyidagi haqiqiy songa aytamiz:*

$$ab = -\,|a||b|. \qquad (1.5.21)$$

Eslatma. *Ixtiyoriy $a > 0$ haqiqiy son uchun*

$$(-1)\cdot a \;=\; -a$$

tenglik o'rinli

Ushbu tenglikning to'g'ri ekanligi yuqoridagi ta'rifdan to'g'ridan-to'g'ri kelib chiqadi.

Nihoyat, *istalgan haqiqiy sonning nolga ko'paytmasini nolga teng deb qabul qilamiz*:

$$a\cdot 0 = 0\cdot a = 0.$$

Yuqoridagi tengliklar bilan aniqlangan ko'paytirish amali xuddi ratsional sonlarni ko'paytirish amali kabi xossalarga ega ekanini ko'rsatish qiyin emas.

Haqiqatan, *kommutativlik* xossasi musbat a va b sonlar uchun

$$\inf_{x\in R(a),\ y\in R(b)} x\cdot y = \inf_{y\in R(b),\ x\in R(a)} y\cdot x$$

tenglikdan kelib chiqadi.

Agar $a < 0$ va $b < 0$ bo'lsa,

$$ba \;=\; |b|\cdot|a| \;=\; |a|\cdot|b| \;=\; ab.$$

Bir ko'paytuvchi musbat va boshqasi manfiy bo'lgan holda ham isbot xuddi shunday.

Assotsiativlik xossasi:

$$(ab)c = a(bc)$$

musbat a, b va c sonlar uchun ratsional sonlar ko'paytmasining assotsiativlik xossasidan bevosita kelib chiqadi. Musbat bo'lmagan ko'paytuvchilar ishtirok etgan hol ham yuqoridagi holga keltiriladi.

Birlik elementning mavjudligi ravshan, chunki bir sifatida quyidagi

$$1 \;=\; 1,000000...$$

cheksiz o'nli kasrni olish mumkin.

Haqiqatan, agar $x \in R(a)$ va $y \in R(1)$, ya'ni x va y ixtiyoriy ratsional sonlar bo'lib,

$$x \geq a, \quad y \geq 1$$

tengsizliklar bajarilsa, $a > 0$ sonlar uchun

$$a \cdot 1 = \inf\ (x \cdot y) = \inf\ (x \cdot 1) = \inf\ x = a$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Aksincha, agar $a < 0$ bo'lsa,

$$a \cdot 1 = -|a| \cdot 1 = -|a| = a.$$

Nihoyat, agar $L^+(a)$ - (1.5.17) tenglik orqali aniqlangan ratsional sonlar intervali bo'lsa, istalgan $a > 0$ element uchun unga *teskari* a^{-1} element

$$b = \inf_{z \in L^+(a)} \frac{1}{z} \tag{1.5.22}$$

ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

4*. Haqiqiy sonlarni yuqorida kiritilgan qo'shish va ko'paytirish amallari ratsional sonlarga xos bo'lgan boshqa xossalarga ham ega. Buning isboti murakkab bo'lmagan, ammo bir turdagi zerikarli mulohazalar yordamida amalga oshiriladi.

Masalan, bu ikki arifmetik amalni bog'lovchi quyidagi *distributivlik*:

$$(a + b)c = ac + bc \tag{1.5.23}$$

xossasini a, b va c sonlar musbat bo'lgan vaqtda tekshiramiz. Ravshanki, istalgan $x \in L^+(a)$, $y \in L^+(b)$ va $z \in L^+(c)$ ratsional sonlar uchun

$$(x + y)z \ = \ xz + yz$$

tenglik o'rinlidir.

a) Haqiqiy sonlar ko'paytmasi ta'rifiga ko'ra

$$xz \leq ac, \quad yz \leq bc.$$

Shu sababli, $xz \in L(ac)$ va $yz \in L(bc)$ bo'ladi va, haqiqiy sonlar yig'indisi ta'rifiga ko'ra

$$xz + yz \leq ac + bc.$$

Demak,

$$(x + y)z \ \leq \ ac + bc. \tag{1.5.24}$$

Shunday ekan, (1.5.24) ning chap tarafida aniq yuqori chegaraga o'tsak,

$$(a + b)c \ \leq ac + bc \tag{1.5.25}$$

tengsizlikni olamiz.

b) Teskari tengsizlik

$$ac + bc \ \leq (a + b)c \tag{1.5.26}$$

ham xuddi shunday ko'rsatiladi. Ikki (1.5.25) va (1.5.26) tengsizliklarni taqqoslasak, biz talab qilinayotgan (1.5.23) tenglikni olamiz.

Boshqa xollar ham ko'rilgan xolga keladi. Misol uchun, a va b haqiqiy sonlar musbat bo'lib, $c < 0$ bo'lgan xolni qaraylik. Bu holda, 1.5.5 - Tasdiqqa ko'ra,

$$(a+b)c = -(a+b)|c| = -(a|c| + b|c|) = (-a|c|) + (-b|c|) = ac + bc.$$

5. Ratsional sonlar uchun tengsilikning yuqorida keltirilgan asosiy xossalari haqiqiy sonlar uchun ham o'rinli bo'lishi arifmetik amallar holidagidek ko'rsatiladi. Bevosita o'rnatilgan tengsizlik munosabatlaridan (1.3.3 - bandga qarang) har qanday ikki a va b haqiqiy sonlar uchun quyidagi munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o'rinli ekani kelib chiqadi:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

Tranzitivlik xossasi ham, ya'ni $a < b$ va $b < c$ bo'lsa, $a < c$ bo'lishi ham oson ko'rsatiladi.

Endi tengsizlikning har ikki tarafiga biror bir haqiqiy son qo'shish mumkinligini ko'rsatamiz. Chunonchi, agar a va b haqiqiy sonlar uchun

$$a \leq b \tag{1.5.27}$$

tengsizlik bajarilsa, istalgan $c \in \mathbf{R}$ larda

$$a + c \leq b + c \tag{1.5.28}$$

ekanini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, $x \in L(a)$ va $z_1 \in L(c)$ hamda $y \in R(b)$ va $z_2 \in R(c)$ bo'lsin. U holda,

$$x \leq a \leq b \leq y, \quad z_1 \leq c \leq z_2$$

tengsizliklar bajariladi. Shuning uchun,

$$x + z_1 \leq y + z_2$$

va, chap tarafda aniq yuqori chegaraga, o'ng tarafda esa aniq quyi chegaraga o'tsak, talab qilinayotgan (1.5.28) tengsizlik hosil bo'ladi.

Isbotlangan xossadan, masalan,

$$a > b \tag{1.5.29}$$

tengsizlikning

$$a - b > 0 \tag{1.5.30}$$

tengsilikka ekvivalentligi kelib chiqadi.

Bu natijadan berilgan tengsizlikning ikki tarafini biror bir musbat songa ko'paytirish mumkinligini olamiz. Haqiqatan, (1.5.29) tengsizlik va demak, (1.5.30) tengsizlik o'rinli bo'lsin deb faraz qilaylik. Musbat sonlarning ko'paytmasi musbat bo'lgani uchun (1.5.30) tengsizlikni $c > 0$ haqiqiy songa ko'paytirsak,

$$ac - bc = (a - b)c > 0$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Demak,

$$ac > bc$$

ekan.

Tengsizlikning boshqa xossalari ham shunga o'xshash isbotlanadi.

Eslatma. Birinchi marta ratsional sonlar to'plamini haqiqiy sonlar to'plamigacha matematik asoslangan ravishda kengaytirish nemis matematigi R.Dedekind tomonidan kesimlar yordamida amalga oshirilgan.

Aslida yuqorida kiritilgan $L(a)$ va $R(a)$ ratsional nurlarni Dedekind kesimining chap (yoki quyi) va o'ng (yoki yuqori) sinflari deyish mumkin. Dedekind nazariyasida aynan mana shu sinflar haqiqiy a soni deb e'lon qilinadi. Dedekind sxemasining ozroq qiyinchilik tug'diradigan tarafi shundaki, bu usulda yuqoridagi nurlarni, cheksiz o'nli kasrlarni jalb qilmasdan, faqat ratsional sonlar orqali aniqlashga to'g'ri keladi.

6. Eslatib o'tamizki, **N** natural (ya'ni, musbat butun) sonlar to'plami to'la tartiblangan, ya'ni ixtiyoriy $E \subset \mathbf{N}$ to'plam quyidan chegaralangan bo'lib, minimal elementga ega. Yuqorida natural sonlarning bu xossasi matematik induktsiya prinsipi asosida yotishi aytilgan edi. Mana shu prinsipning tadbiqiga misol sifatida ikki haqiqiy sonnning natural darajasi uchun N'yuton binomi deb ataluvchi formulani isbotlaymiz.

Bu formulada birinchi n ta natural sonning faktorial deb ataluvchi ko'paytmasi muhim rol o'ynaydi. Faktorial

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$$

simvol orqali belgilanib, «n faktorial» deb o'qiladi.

Matematikada $0! = 1$ deb hisoblashga kelishib olingan.

Agar $c_m, c_{m+1}, ..., c_n$ haqiqiy sonlar bo'lsa, ularning yig'indisi, yozuvni qisqartirish maqsadida, quyidagi:

$$\sum_{k=m}^{n} c_k \;=\; c_m + c_{m+1} + c_{m+2} + \cdots + c_{n-1} + c_n$$

simvolik ko'rinishda yoziladi. Bu yerda m va n butun sonlar bo'lib, ular uchun $m \leq n$ tengsizlik o'rinli. Bu ikki son ba'zan yig'indining chegaralari deb ataladi.

Oxirgi formulada k harfi jamlash indeksi deyilib, uni ixtiyoriy boshqa harf bilan almashtirish mumkin:

$$\sum_{k=m}^{n} c_k \;=\; \sum_{i=m}^{n} c_i \;=\; \sum_{j=m}^{n} c_j.$$

Oson tekshirish mumkinki, agar jamlash indiksini bir birlikka surilsa, yig'indi chegaralari teskari tarafga suriladi, ya'ni:

$$\sum_{k=m}^{n} c_k \;=\; \sum_{k=m+1}^{n+1} c_{k-1}.$$

1.5.1 - Misol (N'yuton binomi). *Har qanday natural n hamda ixtiyoriy $a \in \boldsymbol{R}$ va $b \in \boldsymbol{R}$ lar uchun quyidagi tenglik o'rinli:*

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}. \tag{1.5.31}$$

Isbot. 1) Ravshanki, $n = 1$ bo'lsa, (1.5.31) tenglik bajariladi.

2) Endi biror natural n uchun (1.5.31) tenglik o'rinli deb faraz qilib, n ni $(n+1)$ ga o'zgartirganda ham bu tenglikning saqlanishini ko'rsatamiz. Demak, ravshanki,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} (a+b).$$

Qavslarni ochsak,

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{k} b^{n-k+1}$$

bo'ladi.

Birinchi yig'indida indeksni bir birlikka suramiz, ya'ni k indeks o'rniga $k-1$ qo'yamiz. U holda,

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} a^{k} b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{k} b^{n-k+1}.$$

Endi birinchi yig'indida oxirgi hadni va ikkinchi yig'indida birinchi hadni ajratsak,

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \right] a^{k} b^{n+1-k} \tag{1.5.32}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Agar

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

tenglik o'rinli ekanini hisobga olsak, (1.5.32) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} a^{k} b^{n+1-k}.$$

Ravshanki, bu tenglik (1.5.31) da n nomerni $(n+1)$ ga o'zgartirish natijasida hosil bo'lgan tenglik bilan ustma-ust tushadi.

1) va 2) lardan, matematik induksiya prinsipiga ko'ra, (1.5.31) tenglikning ixtiyoriy n uchun o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Natija. *Agar $a \geq 0$ bo'lsa, ixtiyoriy n uchun*

$$(1+a)^n \geq 1 + na, \quad a \geq 0, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{1.5.33}$$

tengsizlik bajariladi.

Bu tengsizlikka ishonch hosil qilish uchun (1.5.31) tenglikda $b = 1$ deb, uning o'ng tarafida faqat birinchi ikkita, $k = 0$ va $k = 1$ nomerlarga mos kelgan hadlarni qoldirish yetarlidir.

§ 1.6. Sanoqli va kontinuum quvvatli to'plamlar

Agar ikki A va B to'plamlar berilib, A to'plamning har bir a elementiga B to'plamning biror $f(a)$ elementi ma'lum bir qonuniyat asosida mos qo'yilsa,

$$f : A \to B$$

akslantirish berilgan deyiladi.

Agar f akslantirish A to'plamning turli elementlarini B to'plamning turli elementlariga mos qo'yib, A to'plamni B to'plamning ustiga aks ettirsa (Qo'shimchalarda batafsilroq berilgan), $f : A \to B$ akslantirish *o'zaro bir qiymatli* deyiladi. Ushbu holda B to'plamning barcha elementlarida aniqlangan *teskari* $f^{-1} : B \to A$ akslantirish mavjud bo'lib, u quyidagi ikki shartni qanoatlantiradi:

1) har qanday $a \in A$ uchun $f^{-1}(f(a)) = a$ tenglik o'rinli;
2) har qanday $b \in B$ uchun $f(f^{-1}(b)) = b$ tenglik o'rinli.

Aniqki, har qanday o'zaro bir qiymatli akslantirishga teskari akslantirish ham o'zaro bir qiymatli bo'ladi.

Agar ikki A va B to'plamlar uchun birini ikkinchisiga o'zaro bir qiymatli akslantirish mavjud bo'lsa, bu to'plamlar *ekvivalent* deyiladi. Bunday holda ikki A va B to'plamlar bir xil *quvvatga* ega ham deyiladi.

Ta'rif. *Natural sonlar to'plamiga ekvivalent to'plamlar **sanoqli** to'plamlar deb ataladi.*

Boshqacha aytganda, agar to'plam elementlarini natural qator yordamida nomerlash mumkin bo'lsa, bunday to'plam sanoqli deyiladi.

1.6.1 - Tasdiq. *Chekli to'plamlarning sanoqli birlashmasi sanoqli to'plam bo'ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, E_k - berilgan chekli to'plamlar bo'lib,

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

bo'lsin. Agar biz E to'plamning barcha elementlarini natural qator yordamida nomerlab chiqsak, tasdiq isbotlangan bo'ladi.

Biz buni, masalan, E to'plam elementlarini navbatma-navbat nomerlab chiqish orqali amalga oshirsak bo'ladi. Ya'ni avval E_1 to'plamning barcha elementlarini nomerlaymiz, so'ngra E_2 to'plamning barcha elementlarini nomerlaymiz va hakazo. Chunonchi, agar E_k to'plam m_k ta elementdan iborat bo'lib, $a_n^{(k)} \in E_k$ element E_k da n - o'rinda turgan bo'lsa, biz unga E to'plam elementi sifatida yangi

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_{k-1} + n \tag{1.6.1}$$

nomer beramiz.

Q.E.D.

1.6.2 - Tasdiq. *Sanoqli to'plamlarning chekli yoki sanoqli sondagi birlashmasi yana sanoqli to'plam bo'ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, E_k - berilgan sanoqli to'plamlar bo'lib,

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

bo'lsin. Ushbu E to'plamning barcha elementlarini natural qator orqali nomerlab chiqish mumkinligini ko'rsatamiz. Buning uchun biz *diagonallash* deb ataladigan jarayondan foydalanamiz.

Chunonchi, agar E_k to'plam elementlari $a_n^{(k)}, n = 1, 2, 3, ..$ orqali belgilansa, yarim cheksiz matritsa deb ataluvchi quyidagi jadvalni qaraymiz:

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)} & \dots \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & a_2^{(3)} & \dots \\ a_3^{(1)} & a_3^{(2)} & a_3^{(3)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\| \tag{1.6.2}$$

Endi

$$F_m = \{ \ a_n^{(k)} \in E_k \ : \ n + k - 1 = m \ \}$$

to'plamlarni kiritamiz.

Bunday aniqlangan har bir F_m to'plam (1.6.2) matritsada chapdan o'nga va tepaga qarab ketgan m - digonalda joylashgan m ta elementlardan iborat bo'lib, u chekli to'plamdir.

Shunday ekan, quyidagi

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$$

tenglik bajariladi. Bundan chiqdi, E to'plamning sanoqliligi 1.6.1 - Tasdiqdan kelib chiqadi.

Natija. *Butun sonlar to'plami* $\boldsymbol{Z}$ *sanoqlidir.*

Haqiqatan, manfiy butun sonlar to'plamining natural sonlar to'plamiga ekvivalentligi o'z-o'zidan ko'rinib turibdi. Shuning uchun natija 1.6.2 - Tasdiqdan kelib chiqadi.

Q.E.D.

1.6.1 - Teorema. *Barcha ratsional sonlar to'plami* $\boldsymbol{Q}$ *sanoqlidir.*

Isbot. Ixtiyoriy natural k son uchun maxraji k bo'lgan qisqarmaydigan kasrlar to'plamini kiritamiz:

$$E_k = \left\{ \frac{n}{k} : n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Masalan,

$$E_2 = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2},,, \right\}.$$

Ravshanki, har bir E_k to'plam sanoqli bo'lib,

$$\mathbf{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Endi 1.6.2 - Tasdiqdan foydalanish yetarli.

Q.E.D.

1.6.2 - Teorema. $(0,1)$ *intervalning barcha nuqtalari to'plami sanoqli emas.*

Isbot. Bu to'plamni sanoqli deb faraz qilaylik. Bundan chiqdi, biz noldan katta va birdan kichik barcha haqiqiy sonlarni nomerlab chiqishimiz mumkin ekan, ya'ni

$$x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1n}...$$
$$x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}...a_{2n}...$$
$$x_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}...a_{3n}...$$
$$\cdots$$
$$x_k = 0, a_{k1}a_{k2}a_{k3}...a_{kn}...$$

Endi $(0,1)$ intervaldan c haqiqiy sonini shunday tanlab olamizki, u

$$c = 0, c_1c_2c_3...c_n...,$$

ko'rinishga ega bo'lib, barcha c_k sonlar 0 va 9 dan farqli hamda $c_1 \neq a_{11}$, $c_2 \neq a_{22}$, $c_3 \neq a_{33}$, ..., va umuman, $c_n \neq a_{nn}$ tengsizliklar bajarilsin.

Bunday aniqlangan c soni birorta ham x_k soniga teng bo'la olmaydi. Bu esa, $\{x_k\}$ sonlarning $(0,1)$ intervaldagi barcha haqiqiy sonlarni tashkil etishiga, ya'ni $(0,1)$ intervaldagi barcha haqiqiy sonlar to'plami, yuqoridagi farazimizga ko'ra, sanoqli ekaniga ziddir.

Q.E.D.

Ta'rif. $(0,1)$ *intervalga ekvivalent bo'lgan to'plamlar* ***kontinuum*** *quvvatga ega to'plamlar deyiladi.*

Sonlar o'qidan olingan istalgan interval kontinuum quvvatli to'plam bo'lishi aniq. Haqiqatan, agar $a < b$ bo'lsa,

$$y = \frac{x-a}{b-a}$$

akslantirish (a, b) intervalni $(0, 1)$ intervalga o'zaro bir qiymatli akslantiradi. Bunda har bir $x \in (a, b)$ nuqtaga $y \in (0, 1)$ nuqta mos qo'yiladi. Teskari akslantirish quyidagi ko'rinishga ega:

$$x = a + (b-a)y.$$

Xususan, $(-1, 1)$ interval kontinuum quvvatga egadir.

1.6.3 - Teorema. *Barcha haqiqiy sonlar to'plami* $\boldsymbol{R}$ *kontinuum quvvatga ega.*

Isbot. Quyidagi

$$y = \frac{x}{1-|x|}$$

akslantirish $(-1, 1)$ interval va sonlar o'qi $(-\infty, +\infty)$ orasida o'zaro bir qiymatli akslantirish ekanligini ko'rsatish yetarli. Buning uchun esa yuqoridagi akslantirishga teskari akslantirish mavjud va u quyidagi

$$x = \frac{y}{1+|y|}$$

ko'rinishga ega ekanligini qayd etish kifoya.

Q.E.D.

§ 1.7*. Tartiblangan maydon

1. Agar berilgan K to'plamning ixtiyoriy ikki elementi $a \in K$ va $b \in K$ uchun quyida keltirilgan aksiomalarni qanoatlantiradigan *qo'shish* va *ko'paytirish* amallari aniqlangan bo'lsa, bu to'plamga maydon deyiladi. Qo'shish amalining natijasi K to'plamining bir qiymatli ravishda aniqlangan elementi bo'lib, $a + b$ deb belgilanadi va a va b lar *yig'indisi* deyiladi. Ko'paytirish amalining natijasi K to'plamining bir qiymatli ravishda aniqlangan elementi bo'lib, ab deb belgilanadi va a va b larning *ko'paytmasi* deyiladi.

Qo'shish aksiomalari:

A1) qo'shishning kommutativligi:

$$a + b = b + a; \tag{1.7.1}$$

A2) qo'shishning assotsiativligi:

$$(a + b) + c = a + (b + c); \tag{1.7.2}$$

A3) nol deb ataladigan va 0 simvoli orqali belgilanadigan shunday element mavjudki, ixtiyoriy $a \in K$ uchun quyidagi tenglik bajariladi:

$$a + 0 = a; \tag{1.7.3}$$

A4) ixtiyoriy $a \in K$ uchun a ga qarama-qarshi deb ataladigan va $-a$ orqali belgilanadigan shunday yagona element mavjudki, u uchun quyidagi tenglik bajariladi:

$$a + (-a) = 0. \tag{1.7.4}$$

Ko'paytirish aksiomalari:

M1) ko'paytirish kommutativligi:

$$ab = ba; \tag{1.7.5}$$

M2) ko'paytirish assotsiativligi:

$$(ab)c = a(bc); \tag{1.7.6}$$

M3) bir deb ataladigan va 1 simvoli orqali belgilanadigan shunday yagona element mavjudki, $1 \neq 0$ va ixtiyoriy $a \in K$ uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$1a = a; \tag{1.7.7}$$

M4) ixtiyoriy $a \neq 0$ element uchun a ga teskari deb ataladigan va a^{-1} orqali belgilanadigan shunday element mavjudki, u uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$a(a^{-1}) = 1. \tag{1.7.8}$$

Yuqoridagi to'rtta qo'shish va to'rtta ko'paytirish aksiomalariga biz qo'shish va ko'paytirishni bog'lovchi navbatdagi aksiomani qo'shamiz.

Distributivlik aksiomasi:

K dan olingan ixtiyoriy a, b, c elementlar uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$a(b+c) = ab + ac. \tag{1.7.9}$$

Sanab o'tilgan aksiomalar maydon aksiomalari deyiladi. Maydon aksiomalaridan nol va birning yagona ekanligi kelib chiqishini ko'rsatish qiyin emas. Haqiqatdan, agar ikkita 0_1 va 0_2 nollar mavjud deb faraz qilsak, A1 va A3 dan

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

kelib chiqadi.

Shunga o'xshash, agar ikkita 1_1 va 1_2 birlar mavjud deb faraz qilsak, M1 va M3 aksiomalardan

$$1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2$$

kelib chiqadi.

Ratsional sonlar yuqorida sanab o'tilgan barcha aksiomalarni qanoatlantirishini tekshirish oson. Shuning uchun ular maydonni tashkil qiladi. Ravshanki, haqiqiy sonlar to'plami ham maydonni tashkil qiladi.

2. Maydon aksiomalaidan kelib chiqadigan bir necha tasdiqlarni keltiramiz. Avvalam bor biz, qo'shish va ko'paytirishning assotsiativligiga asosan, $(a+b)+c$ o'rniga $a+b+c$ deb va $(ab)c$ o'rniga abc deb yozishimiz mumkinligini qayd etamiz. Bundan tashqari, $a+(-b)$ o'rniga $a-b$ deb yozishga kelishib olamiz.

1.7.1 - Tasdiq (ayirish). *Quyidagi*

$$a + x = b \tag{1.7.10}$$

tenglik faqat va faqat

$$x = b - a \tag{1.7.11}$$

bo'lganda bajariladi.

Isbot. 1) Agar (1.7.10) tenglik bajarilsa,

$$x = x + (a-a) = (x+a) - a = b - a$$

bo'ladi, ya'ni (1.7.11) tenglik ham bajariladi.

2) Agar (1.7.11) tenglik bajarilsa,

$$a + x = a + (b - a) = a - a + b = b$$

bo'ladi, ya'ni (1.7.10) tenglik ham bajariladi.

Q.E.D.

1.7.2 - Tasdiq (bo'lish). *Agar $a \neq 0$ bo'lsa,*

$$ax = b \tag{1.7.12}$$

tenglik faqat va faqat

$$x = ba^{-1} \tag{1.7.13}$$

bo'lganda bajariladi

Isbot. 1) Agar (1.7.12) tenglik o'rinli bo'lsa,

$$x = x(aa^{-1}) = (xa)a^{-1} = (ax)a^{-1} = ba^{-1}$$

bo'ladi, ya'ni (1.7.13) tenglik ham o'rinli bo'ladi.

2). Agar (1.7.13) tenglik bajarilsa,

$$ax = a(ba^{-1}) = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = b$$

bo'ladi, ya'ni (1.7.12) tenglik ham bajariladi.

Q.E.D.

Bundan buyon $b(a^{-1})$ o'rniga $\dfrac{b}{a}$ deb ham yozishga kelishib olamiz.

1.7.3 - Tasdiq. *Har qanday a uchun*

$$0 \cdot a = 0 \tag{1.7.14}$$

tenglik o'rinli.

Haqiqatan ham,

$$0 = a - a = 1 \cdot a - a = (0 + 1) \cdot a - a = 0 \cdot a + 1 \cdot a - a = 0 \cdot a + a - a = 0 \cdot a.$$

Q.E.D.

Bu tasdiqdan 0 ning o'z teskarisiga ega emasligi va 0 *ga bo'lish amalini* aksiomalarni buzmasdan *aniqlab bo'lmasligi* kelib chiqadi.

1.7.4 - Tasdiq *(Qisqartirish qoidasi).*

$$(ab = 0) \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0). \tag{1.7.15}$$

Bu tasdiq, ab ko'paytma nol bo'lishi uchun, a yoki b lardan kamida bittasi nolga teng bo'lishi shartligini anglatadi. Haqiqatan ham, agar, misol uchun, $b \neq 0$ bo'lsa, M4 aksiomaga ko'ra b^{-1} mavjud va shuning uchun

$$a = a(bb^{-1}) = (ab)b^{-1} = 0 \cdot b^{-1} = 0$$

bo'ladi.

Shunga o'xshash, agar $a \neq 0$ bo'lsa, $b = 0$ ekanligi isbotlanadi. Albatta, $a = 0$ va $b = 0$ hol ham bo'lishi mumkin.

Q.E.D.

1.7.5 - Tasdiq. *Ixtiyoriy a va b lar uchun*

$$(-a)b = -(ab). \tag{1.7.16}$$

Chindan ham, distributivlik aksiomasiga ko'ra

$$ab + (-a)b = [a + (-a)]b = 0b = 0,$$

shuning uchun $(-a)b$ element ab ga qarama-qarshi, ya'ni $(-a)b = -(ab)$.

Q.E.D.

Bundan buyon, $-(ab)$ elementni $-ab$ deb belgilashga kelishib olamiz.

1.7.6 - Tasdiq. *Ixtiyoriy a uchun*

$$-(-a) = a. \tag{1.7.17}$$

Haqiqatan ham, (1.7.4) ta'rifga ko'ra,

$$a + (-a) = 0$$

va qo'shishning kommutativligiga ko'ra,

$$(-a) + a = 0,$$

ya'ni a element $(-a)$ ga qarama-qarshi, yoki (1.7.17) o'rinli.

Q.E.D.

1.7.7 - Tasdiq. *Ixtiyoriy a va b lar uchun*

$$(-a)(-b) = ab. \tag{1.7.18}$$

Darhaqiqat, (1.7.16) va ko'paytirishning kommutativligidan

$$(-a)(-b) = -[a(-b)] = -[(-b)a] = -(-ab)$$

bo'ladi, va (1.7.17) ga ko'ra, (1.7.18) bajariladi.

Q.E.D.

Xuddi shu kabi, kiritilgan amallarning boshqa standart xossalari isbotlanadi. Xususan, butun darajaga ega a^n ning odatdagi barcha xossalari o'rinlidir. Bunda natural daraja induktiv ravishda kiritiladi:

$$a^{n+1} = a^n a, \quad n \in \mathbf{N}, \quad a^1 = a,$$

manfiy daraja $a \neq 0$ lar uchun $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $n \in \mathbf{N}$, ko'rinishda aniqlanadi. Nihoyat odatdagidek, agar $a \neq 0$ bo'lsa, $a^0 = 1$ deb qabul qilinadi.

3. Yuqorida keltirilgan maydon aksiomalari ratsional yoki haqiqiy sonlar to'plamlarining to'la tavsifini bermaydi. Bu aksiomalarning yetishmasligi tufayli, ularni qanoatlantiradigan, lekin ratsional sonlar maydonidan ham, haqiqiy sonlar maydonidan ham jiddiy farq qiladigan boshqa maydonlar mavjud bo'lishi mumkin. Bunday maydonlarga misol tariqasida kompleks sonlar maydonini keltirsak bo'ladi. Haqiqiy sonlar maydonining o'ziga xos tarafi shundan iboratki, ixtiyoriy ikki haqiqiy sonni taqqoslash mumkin, ya'ni ulardan qaysi biri ikkinchisidan katta yoki kichik ekanini aytsa bo'ladi.

Faraz qilaylik, biror K maydonda tengsizlik munosabati «$<$» berilgan bo'lsin. Bunda $a < b$ yozuv a elementning b elementdan kichik ekanini anglatadi. Agar «kichik» $<$ munosabat kiritilgan bo'lsa, unga ko'ra «katta» $>$ munosabatni quyidagicha kiritish mumkin: agar $a < b$ bo'lsa, $b > a$ deymiz.

Qat'iy bo'lmagan $a \leq b$ tengsizlik $a < b$ yoki $a = b$ ekanini anglatadi:

$$(a \leq b) \quad \Leftrightarrow \quad (a < b) \vee (a = b).$$

Teskari $a \geq b$ tengsizlik ham xuddi shu singari ma'noga ega.

Qat'iy bo'lmagan «$\leq$» tengsizlikdan farqli «$<$» tengsizlikni ba'zan qat'iy tengsizlik ham deyishadi.

Nol element bilan taqqoslash yordamida musbat va manfiy elementlar kiritiladi. Chunonchi, a element noldan katta, ya'ni $a > 0$ bo'lsa, u *musbat* deyiladi. Agar b element noldan kichik, ya'ni $b < 0$ bo'lsa, u *manfiy* deyiladi.

Shuni alohida qayd etib o'tamizki, matematik tahlilni tushunish uchun tengsizliklar bilan bemalol munosabatda bo'la olishlik zarurdir.

Quyida biz tengsizliklarning asosiy xossalarini to'rtta aksioma ko'rinishda keltiramiz. Bu aksiomalrdan tengsiliklarning boshqa barcha zaruriy xossalarini keltirib chiqarish mumkin.

Tengsizliklar aksiomalari.

IN1) Ixtiyoriy ikki a va b elementlar uchun quyidagi uch munosabatdan bittasi va faqat bittasi o'rinlidir:

$$a = b, \qquad a < b, \qquad b < a.$$

Boshqacha ayitganda, istalgan ikki elementni taqqoslash mumkin.

Biz tengsizliklarni to'g'ri va noto'g'ri tengsizliklarga ajratamiz. Chunonchi, a element b elementdan kichik bo'lgan holda $a < b$ tengsizlik to'g'ri tengsizlik deyiladi, aks holda esa u noto'g'ri tengsizlik deyiladi.

IN2) (tranzitivlik) Agar $a < b$ va $b < c$ bo'lsa, $a < c$ bo'ladi.

IN3) Agar $a < b$ bo'lsa, ixtiyoriy c uchun $a + c < b + c$ bo'ladi.

Boshqacha aytganda, agar to'g'ri tengsizlikni ikki tarafiga bir xil element qo'shsak, hosil bo'lgan tengsizlik yana to'g'ri bo'ladi.

IN4) Agar $a < b$ va $c > 0$ bo'lsa, $ac < bc$ bo'ladi.

Boshqacha aytganda, agar to'g'ri tengsizlikning ikki tarafini bir xil musbat elementga ko'paytirsak, natijada yana to'g'ri tengsizlik hosil bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan aksiomalarni qanoatlantiruvchi tengsizlik munosabati kiritilgan maydonga *tartiblangan maydon* deyiladi.

4. Tengsizlik aksiomalaridan kelib chiqadigan ba'zi natijalarni keltiramiz.

1 - Natija. *Agar $a > 0$ bo'lsa, $-a < 0$ bo'ladi va aksincha, agar $a < 0$ bo'lsa, $-a > 0$ bo'ladi.*

Haqiqatan ham, agar $a > 0$ bo'lsa, **IN1** ga ko'ra $a \neq 0$. Agar $-a < 0$ noto'g'ri bo'lganda edi, $-a > 0$ to'g'ri bo'lar edi. Lekin bunda **IN3** va **IN2** larga ko'ra, $a + (-a) > a > 0$ bo'lishi kerak, bu esa $a + (-a) = 0$ tenglikka ziddir.

Agar $a < 0$ bo'lsa ham tasdiq xuddi yuqoridagidek isbotlanadi.

Eslatib o'tamiz, $2 = 1 + 1$.

2 - Natija. *Agar $a \neq 0$ bo'lsa, $a^2 > 0$ bo'ladi.*

Haqaqatan ham, $a > 0$ bo'lganda **IN4** aksiomaga ko'ra, $a^2 = a \cdot a > 0$. Agar $a < 0$ bo'lsa, 1 - Natijaga ko'ra, $-a > 0$ tengsizlik bajariladi. Shunday ekan, 1.7.7 - Tasdiqni va hozirgina qaralgan holni qo'llasak, talab qilingan

$$a^2 = a \cdot a = (-a) \cdot (-a) > 0$$

tengsizlikni olamiz.

3 - Natija. $1 > 0$.

Haqiqatan ham, $1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0$.

Xuddi shu ravishda ixtiyoriy tartiblangan maydonning ratsional va haqiqiy sonlarga o'xshash boshqa xossalari ham isbotlanadi.

5. Ratsional yoki haqiqiy sonlar to'plami har qanday tartiblangan maydonga qaraganda turli xil xossalarga boyroq ekanligini qayd etamiz. Ana shu muhim xossalarga misol tariqasida Arximed aksiomasi deya atalmish quyidagi xossani keltiramiz.

Arximed aksiomasi. *Tartiblangan K maydondan ixtiyoriy a element olganda ham shunday n butun son topiladiki, u uchun $a < n$ tengsizlik bajariladi.*

Arximed ushbu aksiomani geometrik atamalarda keltirgan: nurda birlik kesmani shuncha marta ketma-ket qo'yish mumkinki, natijada u ixtiyoriy oldindan berilgan nuqtadan o'tib ketadi.

Arximed aksiomasi o'rinli bo'lgan tartiblangan maydonga arximedcha tartiblangan maydon deyiladi. Shunday qilib, ratsional sonlar arximedcha tartiblangan maydonni tashkil qilar ekan. Haqiqiy sonlar to'plami ham arximedcha tartiblangan maydonni tashkil qilishini qayd etamiz.

6. Faraz qilaylik, K tartiblangan maydon va $E \subset K$ ixtiyoriy to'plam bo'lsin.

Ta'rif. *Agar shunday $B \in K$ element mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $x \in E$ uchun*

$$x \leq B$$

tengsizlik bajarilsa, E to'plam yuqoridan chegaralangan deyiladi.

B element E to'plamning yuqori chegarasi deyiladi.

Ta'rif. *Agar shunday $A \in K$ element mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $x \in E$ uchun*

$$x \geq A$$

tengsizlik bajarilsa, E to'plam quyidan chegaralangan deyiladi.

A element E to'plamning quyi chegarasi deyiladi.

Ta'rif. *Agar to'plam yuqoridan ham quyidan ham chegaralangan bo'lsa, u chegaralangan deyiladi.*

Shubhasiz, agar biror to'plam yuqoridan chegaralangan bo'lib, B uning yuqori chegarasi bo'lsa, B dan katta ixtiyoriy element ham shu to'plamning yuqori chegarasi bo'ladi. Boshqacha aytganda, yuqoridan chegaralangan to'plam cheksiz ko'p yuqori chegaraga ega. Shular ichida eng kichigi ayniqsa muhimdir.

Ta'rif. *Yuqoridan chegaralangan to'plamning aniq yuqori chegarasi deb yuqori chegaralarning eng kichigiga aytiladi.*

Boshqacha aytganda, agar M element quyidagi ikki shartni qanoatlantirsa, u E to'plamnining aniq yuqori chegarasi deyilar ekan:

(i) ixtiyoriy $x \in E$ uchun

$$x \leq M$$

tengsizlik o'rinli;

(ii) ixtiyoriy $M' < M$ olganda ham shunday $x' \in E$ topiladiki, u uchun

$$x' > M'$$

tengsizlik bajariladi.

Bunda (i) - shart M element E to'plamning yuqori chegarasi ekanligini, (ii) - shart esa, ixtiyoriy undan kichikroq M' element yuqori chegara bo'la olmasligini, ya'ni M eng kichik yuqori chegara ekanligini anglatadi.

E to'plamning aniq yuqori chegarasi lotincha supremum so'zidan olingan $\sup E$ simvoli orqali belgilanadi.

Quyidan chegaralangan to'plamning aniq quyi chegarasi, yuqoridagiga o'xshash, quyi chegaralarning eng kattasi sifatida aniqlanadi. E to'plamning aniq quyi chegarsasi lotincha infimum so'zidan olingan $\inf E$ simvoli orqali belgilanadi.

Agar E to'plamining aniq yuqori chegarasi M shu to'plamning elementi bo'lsa, ya'ni $M \in E$ bo'lsa, M to'plamning maksimal elementi yoki sodda qilib maksimumi ham deb ataladi. Xuddi shu kabi minimal element yoki minimum aniqlanadi.

Ixtiyoriy tartiblangan K maydonda aniq yuqori va aniq quyi chegaralar orasida sodda bog'liqlik borligini ko'rsatamiz.

Istalgan $E \subset K$ to'plam uchun $-E$ simvol orqali

$$-E = \{x \in K : -x \in E\}$$

to'plamni belgilaymiz.

Quyidagi tasdiq o'rinli.

1.7.9 - Tasdiq. *Ixtiyoriy $E \subset K$ to'plam uchun*

$$\inf(-E) \ = \ -\sup E$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Agar

$$a = \inf(-E)$$

bo'lsa, aniq quyi chegaraning ta'rifiga ko'ra, quyidagi ikki tengsizlik bajariladi:

1) istalgan $x \in E$ uchun

$$a \ \leq \ -x \ ;$$

2) istalgan $a' > a$ element olganda ham shunday $x' \in E$ elemet topiladiki, u uchun

$$-x' \ < \ a'.$$

Bu munosabatlarni quyidagi ko'rinishda qayta yozish mumkin:

1) istalgan $x \in E$ nuqta uchun

$$x \ \leq \ -a$$

tengsizlik o'rinli,

2) istalgan $a' > a$ (ya'ni $-a' < -a$) element olganda ham shunday $x' \in E$ element topiladiki, u uchun

$$x' \ > \ -a'$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bu degani, $\sup E = -a$, ya'ni

$$a = -\sup E \ .$$

Q.E.D.

7. Yuqoridan chegaralangan to'plam doim ham aniq yuqori chegaraga ega bo'ladimi? Agar gap ixtiyoriy tartiblangan maydon to'g'risida ketsa, bu savolga javob, umaman aytganda, salbiy. Misol sifatida tartiblangan ratsional sonlar maydonini olish mumkin. Yuqorida qayd etilganidek, chegaralangan

$$E = \{x \in \mathbf{Q} : \quad x^2 < 2\}$$

to'plam na aniq yuqori va na aniq quyi chegaraga ega emas.

Bu to'plamning aniq yuqori chegarasi $\sqrt{2}$ soni bo'lishi mumkin edi, ammo bu son ratsional emas, shuning uchun, ratsional sonlar sinfida u «mavjud emas».

Bu misolda yuqoridan chegaralangan to'plamning aniq yuqori chegaraga ega emasligi sababi ratsional sonlar to'plamining to'la emasligidir. Shu munosabat bilan, barcha arximedcha tartiblangan maydonlar to'plamidan shundaylarini ajratib olaylikki, ularda har qanday yuqoridan chegaralangan to'plam aniq yuqori chegaraga ega bo'lsin. Chunonchi, ixtiyoriy tartiblangan maydon K uchun quyidagi aksiomani kiritamiz.

Aniq yuqori chegara prinsipi. *Tartiblangan maydonning ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan, yuqoridan chegaralangan to'plami uchun aniq yuqori chegara mavjud.*

Ushbu aksioma o'rinli bo'lgan tartiblangan maydolar *to'la* deyiladi.

Shunday qilib, ratsional sonlarning tartiblangan maydoni to'la bo'lmasdan, haqiqiy sonlar maydoni esa, 1.4.1 - Teoremaga ko'ra, to'ladir. Bundan tashqari, istalgan to'la arximedcha tartiblangan maydon ma'lum bir ma'noda haqiqiy sonlar maydoni bilan ustma-ust tushishini ko'rsatish mumkin.

Aksiomatik ravishda haqiqiy sonlarni kiritish usuli *ixtiyoriy to'la arximedcha tartiblangan maydonni haqiqiy sonlar to'plami deb e'lon qilishdan iboratdir.* Ammo bu usulda shunday to'lamning mavjudlik masalasi ochiq qoladi.

Bu masalaning yechimini, muayyan haqiqiy sonlar to'plamini qurishdan iborat bo'lgan, konstruktiv usul beradi. Bu usulni biz 1.4 paragrafda amalga oshirgan edik. Bunda bizdan serdiqqat mehnat va zerikarli mulohazalar talab qilinganiga guvoh bo'ldik. Ammo, bu ikki usulni taqqoslamoqchi bo'lsak, bu borada mashhur fransuz matematigi Anri Lebegni so'zlarini keltirish foydalidir. U shunday degan edi: o'g'irlik halol mehnatdan qanday ustunliklarga ega bo'lsa, aksiomatik usul ham konstruktiv usuldan xuddi shunday ustunliklarga egadir.

Haqiqiy sonlar to'plamini qurishning yana bir konstruktiv usulini R.Dedekind taklif qilgan edi. Bu usulda haqiqiy sonlar ratsional sonlar to'plamimining kesimi sifatida kiritiladi. Ya'ni ratsional sonlar to'plami ikki o'zaro kesishmaydigan, birining elementlari ikkinchisining har bir elementidan katta bo'lgan qism to'plamlarga bo'linadi. Bu ikki konstruktiv usullar ma'lum ma'noda bitta natijaga olib kelishini ko'rsatish qiyin emas.

§ 1.8. Kompleks sonlar

1. Kompleks son tushunchasi.

Agar ikki haqiqiy a va b sonlar uchun qaysisi birinchi va qaysisi ikkinchiligi aniqlangan bo'lsa, bunday sonlarga tartiblangan juftlik deyiladi. Tartiblangan juftlikni biz (a, b) ko'rinishda yozamiz. Bunda a - birinchi va b - ikkinchi element.

1.8.1 - Ta'rif. *Haqiqiy sonlarning tartiblangan juftligini* ***kompleks son*** *deb atаymiz.*

Shunday qilib, agar z - kompleks son bo'lsa, $z = (a, b)$ bo'ladi, bunda a va b - haqiqiy sonlar bo'lib, a - kompleks z sonining haqiqiy qismi va b esa uning mavhum qismi deyiladi. Haqiqiy va mavhum qisimlar uchun quyidagi belgilashlar ishlatiladi:

$$\mathrm{Re}\ z = a,\ \mathrm{Im}\ z = b. \tag{1.8.1}$$

1.8.2 -Ta'rif. *Agar ikki kompleks $z_1 = (a_1, b_1)$ va $z_2 = (a_2, b_2)$ sonlar uchun $a_1 = a_2$ va $b_1 = b_2$ tengliklar o'rinli bo'lsa, bunday kompleks sonlar teng deyiladi.*

1.8.3 - Ta'rif. *Ikki kompleks $z_1 = (a_1, b_1)$ va $z_2 = (a_2, b_2)$ sonlarning* ***yig'indisi*** *$z_1 + z_2$ deb quyidagi kompleks songa aytamiz:*

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2). \tag{1.8.2}$$

1.8.4 - Ta'rif. *Ikki kompleks $z_1 = (a_1, b_1)$ va $z_2 = (a_2, b_2)$ sonlarning* ***ko'paytmasi*** *$z_1 \cdot z_2$ deb quyidagi kompleks songa aytamiz:*

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + a_2b_1). \tag{1.8.3}$$

Kompleks sonlar to'plami (1.8.2) va (1.8.3) tengliklar orqali kiritilgan qo'shish va ko'paytirish amallari bilan bergalikda **C** simvoli orqali belgilanadi. Bunda nol sifatida

$$\mathbf{0} = (0, 0)$$

son va bir sifatida

$$\mathbf{1} = (1, 0)$$

son olinadi.

1.8.1 - Tasdiq. *C - kompleks sonlar to'plami maydonni tashkil etadi.*

Isbot haqiqiy sonlar hossalarigan kelib chiqadi.

Ikki kompleks $z_1 = (a_1, b_1)$ va $z_2 = (a_2, b_2)$ sonlarning ayirmasi

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2,\ b_1 - b_2)$$

ekanligi to'g'ridan-to'g'ri hisoblash orqali tekshiriladi. Ikki kompleks $z_1 = (a_1, b_1)$ va $z_2 = (a_2, b_2)$ sonlarning, $z_2 \neq 0$ shart bajarilgan holdagi nisbati biroz murakkabroq ko'rinishga ega:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2},\ \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right).$$

C maydonning $(a, 0)$ ko'rinishdagi elementini $a \in \mathbf{R}$ haqiqiy son deb hisoblaymiz va

$$(a, 0) = a$$

deb yozamiz.

Haqiqiy sonlar maydonidan o'laroq, kompleks sonlar maydoni tartiblangan emasligini qayd etish zarur.

1.8.5 - Ta'rif. *Quyidagi kompleks son*

$$i = (0,\ 1) \tag{1.8.4}$$

***mavhum bir** deyiladi.*

1.8.2 - Tasdiq. *Quyidagi tenglik o'rinli:*

$$i^2 = -1. \tag{1.8.5}$$

Isbot. Kompleks sonlar ko'paytmasi ta'rifiga ko'ra:

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0) = (-1,\ 0) = -1.$$

Q.E.D.

1.8.3 - Tasdiq. *Istalgan kompleks son $z = (a, b)$ uchun*

$$z = a + ib \tag{1.8.6}$$

tenglik o'rinli

Isbot. Yig'indi va ko'paytma ta'riflariga ko'ra:

$$a + ib = (a,0) + (0,1)(b,0) = (a,0) + (0 \cdot b - 1 \cdot 0,\ 0 \cdot 0 + b \cdot 1) =$$
$$= (a,0) + (0,b) = (a,b) = z.$$

Q.E.D.

1.8.3 - Tasdiq biz uchun (1.8.6) ko'rinishdagi kompleks songa mavhum bir, ya'ni i qatnashgan haqiqiy son sifatida qarashga imkon beradi.

Kiritilgan belgilash va tushunchalardan foydalanib, ikki kompleks (a_1, b_1) va (a_2, b_2) sonlar uchun kiritilgan qo'shish va ko'paytirish amallarini quyidagi ko'rinishda yozib olish mumkin:

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

2. Kompleks son moduli.

1.8.6 - Ta'rif. *Kompleks $z = a + ib$ songa **qo'shma** deb $\overline{z} = a - ib$ kompleks songa aytiladi.*

Masalan, agar $z = 2 + 3i$ bo'lsa, $\overline{z} = 2 - 3i$ bo'ladi.

1 - Eslatma. Istalgan kompleks z son uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}z, \quad z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}z. \tag{1.8.7}$$

2 - Eslatma. Istalgan ikki z_1 va z_2 kompleks sonlar uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \tag{1.8.8}$$

(1.8.7) va (1.8.8) tengliklarning isboti bevosita hisoblash orqali amalga oshiriladi. Masalan, (1.8.8) - tengliklardan birinchisining haqligiga ishonch hosil qilaylik. Faraz qilaylik, $z_1 = a_1 + b_1$ va $z_2 = a_2 + b_2$ bo'lsin. U holda, (1.8.3) ga ko'ra,

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

va shuning uchun,

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1) = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

1.8.7 - Ta'rif. *Kompleks $a + ib$ sonning **moduli** deb shunday manfiy bo'lmagan $|z|$ soniga aytiladiki, u uchun*

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \tag{1.8.9}$$

tenglik o'rinli.

Demak,

$$|z|^2 = |\mathrm{Re}z|^2 + |\mathrm{Im}z|^2.$$

Masalan, agar $z = 4 + 3i$ bo'lsa, $|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ bo'ladi. Ravshanki, $|\overline{z}| = |z|$.

Kompleks son mudulining ta'rifidan bevosita quyidagi tengsizliklar kelib chiqadi:

$$|\mathrm{Re}| \le |z|, \quad |\mathrm{Im}| \le |z|. \tag{1.8.10}$$

Qo'shma son tushunchasidan foydalanib ikki kompleks z_1 va z_2 sonlar nisbatini quyidagi sodda ko'rinishga keltirish mumkin:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Masalan,

$$\frac{2-3i}{4+3i} = \frac{(2-3i)\cdot(4-3i)}{|4+3i|^2} = \frac{-1-18i}{25}.$$

1.8.4 - Tasdiq. *Istalgan ikki kompleks z_1 va z_2 sonlar uchun quyidagi tenglik o'rinli:*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \qquad (1.8.11)$$

Isbot. Modulning ta'rifi - (1.8.9) ga ko'ra (1.8.8) dagi tengliklardan

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2)\overline{(z_1 \cdot z_2)} = z_1\overline{z_1} \cdot z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

kelib chiqadi.

Q.E.D.

Ikki kompleks son yig'indisi moduli uchun o'rinli bo'lgan formula haqiqiy sonlar uchun ma'lum bo'lgan formuladan birmuncha farq qiladi.

1.8.5 - Tasdiq. *Istalgan ikki kompleks z_1 va z_2 sonlar uchun quyidagi formula o'rinli:*

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}). \qquad (1.8.12)$$

Isbot. Modulning ta'rifi - (1.8.9) ga ko'ra (1.8.7) va (1.8.8) tengliklardan

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} =$$

$$= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} =$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} =$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$$

kelib chiqadi.

Q.E.D.

1.8.6 - Tasdiq. *Istalgan ikki kompleks z_1 va z_2 sonlar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \qquad (1.8.13)$$

Isbot (1.8.12) tenglik va (1.8.10) tengsizliklardan kelib chiqadi:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) \leq$$

$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \cdot \overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Q.E.D.

Natija. *Istalgan kompleks $z_1, z_2, ..., z_n$ sonlar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli*

$$|z_1 + z_2 + ... + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|. \qquad (1.8.14)$$

3*. Kompleks sonning geometrik interpritatsiyasi.

Biz $\mathbf{R}^2$ koordinatalar tekisligini barcha tartiblangan (x, y) juftliklar to'plami sifatida aniqlaymiz mumkin, bu yerda $x \in \mathbf{R}$ va $y \in \mathbf{R}$. Odatda tartiblangan (x, y)

juftlik tekislik nuqtasi deb ham ataladi, x va y nuqtalar esa uning koordinatalari deyiladi. Birinchi koordinatani ba'zan abssissa va ikkinchi koordinatani ordinata deb ham atashadi. Har qanday kompleks son haqiqiy sonlarning tartiblangan juftligi bo'lganligi sababli, ravshanki, kompleks sonlar to'plamini $\mathbf{R}^2$ koordinatalar tekisligi deb qarasa bo'ladi. Bunda yagona farq shundan iboratki, kompleks sonlar uchun ko'paytirish amali aniqlangan, lekin koordinatalar tekisligidagi nuqtalar uchun esa bunday amal aniqlanmagan.

Bunday mos qo'yishda kompleks sonning moduli qaralayotgan nuqtani koordinatalar boshi bilan bog'lovchi kesma uzunligiga teng bo'ladi.

Istalgan $z = a+ib$ kompleks sonni olaylik. M – unga mos koordinatalar tekisligidagi (a, b) koordinatalik nuqta bo'lsin. Ox o'q va OM nur orasidagi burchak qiymatini φ orqali belgilaylik (bu burchak qiymatining haqiqiy sonlar nazariyasiga asoslangan ta'rifini 3 - bobda keltiramiz).

Ushbu φ burchak z kompleks sonning *argumenti* deyiladi va

$$\arg z \ = \ \varphi$$

ko'rinishda belgilanadi.

Agar trigonometrik funksiyalardan foydalanadigan bo'lsak, bu burchak tangensi b ordinataning a abssissaga nisbati, ya'ni

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} \tag{1.8.15}$$

ekanini ko'rish qiyin emas.

Masalan, agar $z = 1 + i$ bo'lsa, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a} = 1$ bo'ladi va, natijada, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Ikki kompleks son ko'paytirilganda ular argumentlari qo'shilishini, ya'ni

$$\arg(z_1 \cdot z_2) \ = \ \arg z_1 \ + \ \arg z_2 \tag{1.8.16}$$

tenglik 2π ga karralik qo'shiluvchi aniqligida bajarilishini tekshirish murakkab emas.

Haqiqatan, agar $z_1 = a_1 + ib_1$ va $z_2 = a_2 + ib_2$ bo'lsa, $z_1z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$ bo'ladi va shuning uchun,

$$\operatorname{tg}[\arg(z_1 \cdot z_2)] \ = \ \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{a_1a_2 - b_1b_2} \ = \ \frac{\dfrac{b_1}{a_1} + \dfrac{b_2}{a_2}}{1 - \dfrac{b_1}{a_1} \cdot \dfrac{b_2}{a_2}} \ = \ \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2}{1 - \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Natijada, tangenslar yig'indisi uchun formuladan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$\operatorname{tg}[\arg(z_1 \cdot z_2)] \ = \ \operatorname{tg}[\arg z_1 + \arg z_2].$$

Nihoyat, oxirgi tenglikda tangenslarni tashlab yuborsak, talab qilinayotgan (1.8.16) munosabatni olamiz.

§ 1.9. Misollar

1 - Misol. Tengsizlikni isbotlang:

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!, \ \ n \geq 1. \tag{1.9.1}$$

Ko'rsatma. Induksiya usulini qo'llab,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3,\ n \geq 1, \tag{1.9.2}$$

tengsizlikdan foydalaning.

2 - Misol. Tengsizlikni isbotlang:

$$n^{\frac{n}{2}} < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n,\ n \geq 1. \tag{1.9.3}$$

Ko'rsatma. Induksiya usulini qo'llang. Bunda chapdagi tengsizlikni ko'rsatish uchun (1.9.2) tengsizlikdan va o'ngdagi tengsizlikni isbotlash uchun esa,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2,\ n \geq 1, \tag{1.9.4}$$

tengsizlikdan foydalaning.

3 - Misol. Tengsizlikni isbotlang:

$$2^n > n^3,\quad n \geq 10. \tag{1.9.5}$$

Ko'rsatma. Agar $n = 10$ bo'lsa, $2^{10} = 1028$ va $10^3 = 1000$. Demak, bu holda (1.9.5) tengsizlik o'rinli ekan. Endi induksiya usulini qo'llab,

$$2n^3 > (n+1)^3,\quad n \geq 4,$$

tengsizlikdan foydalanish yetarlidir.

4 - Misol. Agar $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$ va barcha $x_j > 0$ bo'lsa,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n \tag{1.9.6}$$

tengsizlikni isbotlang.

Ko'rsatma. Quyidagi ko'rinishda induksiyani qo'llash mumkin. Tasdiq $n = 1$ uchun o'rinli, albatta. Endi tasdiqni n uchun o'rinli deb, uni $n+1$ uchun isbotlaymiz.

Avval n toq bo'lsin deylik. U holda $n+1 = 2k$ va shuning uchun induksiya shartiga ko'ra,

$$(x_1+x_2)+(x_3+x_4)+\cdots+(x_n+x_{n+1}) \geq 2(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4}+\cdots+\sqrt{x_nx_{n+1}}) \geq 2k = n+1,$$

chunki $\sqrt{x_1x_2} \cdot \sqrt{x_3x_4} \cdots \sqrt{x_nx_{n+1}} = 1$.

Endi n juft bo'lsin deylik. U holda $x_{n+2} = 1$ deb, yuqoridagi usulda tasdiqni $n+2$ uchun isbotlash yetarli.

5 - Misol. Agar $y_j > 0,\ j = 1, 2, \cdots, n$ bo'lsa,

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \geq \sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdots y_n} \tag{1.9.7}$$

tengsizlikni isbotlang.

Ko'rsatma. Quyidagi

$$x_j = \frac{y_j}{\sqrt[n]{y_1 \cdot y_j \cdots y_n}},\quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

belgilashdan foydalanib, yuqoridagi tasdiqni qo'llang.

6 - Misol. Agar $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$ va barcha $x_j > 0$ bo'lsa,

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \geq 2^n$$

tengsizlikni isbotlang.

Ko'rsatma. Quyidagi

$$\frac{1}{x_j}(1 + x_j)^2 = (1 + x_j)(1 + \frac{1}{x_j}) = 2 + (x_j + \frac{1}{x_j}) > 2^2$$

munosabatlarni o'zaro ko'paytiring.

7 - Misol. Dirixle nomi bilan ataluvchi prinsip quyidagidan iborat: *agar* $(n+1)$ *ta jismni* n *ta qutiga joylashtirilsa, shunday quti topiladiki, unda bittadan ortiq jism bo'ladi.*

Mana shu prinsipdan foydalanib, navbatdagi tasdiqni isbotlang. Har qanday musbat α va natural N uchun shunday natural m va n sonlar topiladiki, ular uchun $n \leq N$ va

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leq \frac{1}{nN} \tag{1.9.8}$$

tengsizlik bajariladi.

Ko'rsatma. Har qanday x soni uchun uning kasr bo'lakchasi deb $\{x\} = x - [x]$ songa aytiladi, bu yerda $[x]$ orqali x sonining butun qismi belgilangan. Berilgan α haqiqiy son uchun $k = 0, 1, 2, ..., N$ larda $\{k\alpha\}$ kasr bo'lakchalarni qaraylik. Bu bo'lakchalarning hammasi $[0, 1)$ yarim intervalda yotadi. Endi $[0, 1)$ yarim intervalni N ta bo'lakka bo'lib, Dirixle prinsipidan foydalaning.

8 - Misol. To'g'ri chiziqdagi o'zaro kesishmaydigan intervallar to'plami, oshib borsa, sanoqli ekanini isbotlang.

Ko'rsatma. Har bir shunday intervalga biror ratsional sonni mos qo'yish mumkinligini ko'rsating.

9 - Misol. To'g'ri chiziqdagi har qanday sanoqsiz to'plam chegaralangan sanoqsiz qismiy to'plamga ega ekanini ko'rsating.

Ko'rsatma. Agar tasdiqning teskarisini faraz qilinsa, bunday to'plam sanoqli sondagi sanoqli to'plamlar birlashmasiga teng bo'lishini ko'rsating.

10 - Misol. $[0, 1]$ kesma va $(0, 1)$ interval orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating.

Ko'rsatma. $[0, 1]$ kesmadagi irratsional sonlarni o'z o'rnida qoldirib, $[0, 1]$ kesmadagi va $(0, 1)$ intervaldagi ratsional sonlar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating.

11 - Misol. $[0, +\infty)$ yarim to'g'ri chiziq va (a, b) interval orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating.

Ko'rsatma. $[0, +\infty)$ yarim to'g'ri chiziq va (a, b) intervaldagi iratsional va ratsional nuqtalar orasida alohida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating. Irratsional nuqtalar orasida, masalan, quyidagi moslikni olish mumkin:

$$x = \frac{y - a}{b - y},\ y = \frac{bx + a}{1 + x},\ x \in (0, +\infty),\ y \in (a, b).$$